

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR *marcel merlin*
dos santos E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM *26, 08, 2010*
Roberto Luiz Faria
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Marcel Merlin dos Santos

**Controle H-infinito em Suspensões Ativas Aplicando
Técnicas baseadas em Desigualdades Matriciais
Lineares**

Campinas, 2010.

Marcel Merlin dos Santos

Controle H-infinito em Suspensões Ativas Aplicando Técnicas baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Alberto Luiz Serpa

Campinas

2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

sa59c Santos, Marcel Merlin dos
Controle H-infinito em suspensões ativas aplicando técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares / Marcel Merlin dos Santos. --Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Controle robusto. 2. Sistema de controle por realimentação. 3. Vibração - Controle. 4. Programação convexa. I. Serpa, Alberto Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: H-infinity control at active suspension applying techniques based on linear matrix inequalities

Palavras-chave em Inglês: Robust control, Feedback control system, Vibration - Control, Convex programming

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Luiz Carlos Sandoval Góes, Lazaro Valentim Donadon

Data da defesa: 26/08/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Controle H-infinito em Suspensões Ativas Aplicando
Técnicas baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares**

Autor: Marcel Merlin dos Santos

Orientador: Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação:



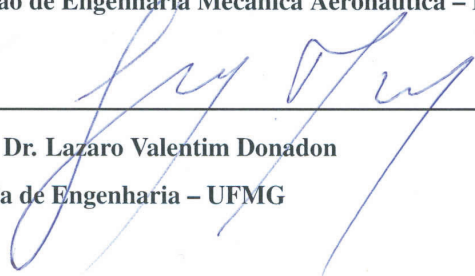
Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, presidente

Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP



Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes

Divisão de Engenharia Mecânica Aeronáutica – ITA



Prof. Dr. Lázaro Valentim Donadon

Escola de Engenharia – UFMG

Campinas, 26 de Agosto de 2010.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer meus pais, pois foram eles que me deram apoio durante toda a minha vida nas minhas decisões, sejam elas pequenas ou grandes. Além disso, agradeço também a minha namorada, que me ajudou muito na elaboração desse estudo. Não posso esquecer do meu irmão, com suas palavras de apoio sempre que precisei.

Agradeço também aos meus professores, tanto da graduação como da pós-graduação, que orientaram meu caminho durante meus estudos, e aos meus colegas de estudo, que me mostraram outras formas de visualizar o problema.

Resumo

Nesse estudo foram aplicadas as técnicas de controle H_∞ em modelos de suspensões ativas veiculares. O interesse de controlar o sistema baseado nessa técnica está também no fato de que sua obtenção pode ser feita através da solução de problemas de otimização, sendo estes baseados no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), que proporciona flexibilidade na formulação de problemas de otimização e possui algoritmos eficientes para a solução.

Esse estudo foi baseado em três modelos de suspensão diferentes, com dois, quatro e sete graus de liberdade. Uma suspensão deve proporcionar conforto e segurança aos passageiros. Baseado nisso, adotou-se como desempenho o deslocamento simultâneo das rodas relativo ao chão (segurança) e a aceleração vertical do veículo (conforto dos passageiros). Como sinal de medição, utilizou-se a aceleração vertical do veículo. O controlador foi obtido considerando incertezas do modelo (neste estudo consideradas como incertezas paramétricas).

Todos os modelos de suspensão veicular com controle simulados apresentaram melhores resultados, reduzindo não só a resposta temporal do sistema como também a resposta em frequência, melhorando o conforto e a segurança dos passageiros. Conclui-se assim que é possível controlar o sistema mesmo quando sujeito a incertezas de modelagem.

Para a solução numérica do problema foi utilizado o software *MATLAB 7.4* com dois pacotes livres de otimização: Yalmip e Sedumi.

Palavras Chave: Suspensões Ativas, Controle de Vibrações, Desigualdades Matriciais Lineares, Sistemas Incertos.

Abstract

In this study the techniques of control H_∞ were applied in active suspension models. The interest in controlling the system using this technique is based on the fact that the solution can be obtained by solving optimization problems, which are based on the use of Linear Matrix Inequalities, providing flexibility during the problem formulation and with efficient algorithms to solve the problem.

This study was based on three different suspension models with two, four and seven degrees of freedom. A suspension should provide comfort and security to the passengers. Based on this, the displacement of wheels on the ground (security) and the vertical acceleration of the vehicle (passengers comfort) were adopted as system performance. The vertical acceleration of the vehicle was the measured signal. The active suspension controller was designed considering uncertainties (in this study as parametric uncertainties).

All active suspensions controlled models simulated improved their results, reducing not only system's time response but also system's frequency response. This means an improvement of the passengers' safety and comfort. It was concluded that controlling the system even when it has uncertainties was possible.

To solve the numerical problem the software *MATLAB 7.4* was used with two free optimization packages: Yalmip and Sedumi.

Key Words: Active Suspension, Vibration Control, Linear Matrix Inequalities, Uncertain Systems.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Breve histórico dos sistemas de suspensão	2
1.3	Objetivos do trabalho	5
1.4	Breve Revisão Bibliográfica	6
1.5	Organização deste trabalho	9
2	Controladores H_∞ por LMI	10
2.1	Problema H_∞	10
2.2	Desigualdade Matriciais Lineares	14
2.3	Controlador H_∞	15
2.3.1	Caso de \mathbf{D}_{22} não nula	19
2.4	Funções de Ponderação	20
2.4.1	Formulação do problema H_∞ com as funções de ponderação	23
2.5	Incertezas Paramétricas	24
2.6	Solvers Utilizados	29
3	Modelos Matemáticos de Suspensões e Controle H_∞	31
3.1	Principais Requisitos para Suspensões	31
3.2	Modelo com 2 graus de liberdade	32
3.3	Modelo com 4 graus de liberdade	34
3.4	Modelo com 7 graus de liberdade	40
3.5	Funções de ponderação utilizadas para a obtenção da planta generalizada	50

3.6	Incertezas paramétricas nos modelos	53
4	Resultados obtidos	57
4.1	Modelo com 2 graus de liberdade	59
4.1.1	Aplicação das funções de ponderações no modelo	59
4.1.2	Resultados obtidos da análise com incertezas no modelo	61
4.2	Modelo com 4 graus de liberdade	75
4.2.1	Aplicação das funções de ponderações no modelo	75
4.2.2	Resultados obtidos da análise com incertezas no modelo	76
4.2.3	Reprojetando o controlador limitando a potência necessária em 20 kW	93
4.3	Modelo com 7 graus de liberdade	109
4.3.1	Aplicação das funções de ponderações no modelo	109
4.3.2	Resultados obtidos da análise com incertezas no modelo	112
4.3.3	Reprojetando o controlador limitando a potência necessária em 20 kW	133
5	Conclusões e sugestões para próximos trabalhos	154

Lista de Figuras

2.1	Representação dinâmica do problema H_∞	11
2.2	Planta aumentada do sistema com as funções de ponderação	20
2.3	Ilustração de possíveis funções de ponderação.	22
2.4	Exemplo de aplicação das funções de ponderação.	23
2.5	Exemplo de conjunto convexo e não convexo.	25
2.6	Exemplo de conjunto e seu respectivo envelope convexo.	25
2.7	Exemplo de politopo formado pelos pontos extremos devido às incertezas paramétricas.	26
3.1	Esquema para ilustrar o modelo com 2 graus de liberdade simplificado	32
3.2	Esquema para ilustrar o modelo com 4 graus de liberdade simplificado	35
3.3	Esquema para representar o momento gerado pelas irregularidades da pista	39
3.4	Esquema para ilustrar o modelo com 7 graus de liberdade simplificado	41
3.5	Vistas lateral e frontal da ilustração do modelo com 7 graus de liberdade	42
3.6	Vistas do modelo de 7 graus de liberdade para ilustrar o momento gerado pelas irregularidades da pista	48
3.7	Exemplo das funções de ponderação aplicadas no modelo de 2 graus de liberdade	51
3.8	Funções de ponderação que serão aplicadas nos modelos	53
4.1	Obstáculo	58
4.2	9 possíveis respostas em frequência da aceleração vertical do veículo do sistema sem controle e função de ponderação W_{a1} usada para a aceleração.	60
4.3	9 possíveis respostas em frequência do deslocamento relativo da roda do sistema sem controle e função de ponderação W_{khp_i} relacionada ao deslocamento relativo da roda.	61

4.4	Respostas em frequência do modelo de dois graus de liberdade, sem controlador e com controlador H_∞ , relacionados com a aceleração vertical do veículo.	65
4.5	Respostas em frequência do modelo de dois graus de liberdade, sem controlador e com controlador H_∞ , relacionados com o deslocamento relativo da roda.	66
4.6	Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).	68
4.7	Deslocamento relativo da roda após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).	71
4.8	Potência necessária para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	74
4.9	9 possíveis respostas em frequência da aceleração vertical do veículo do sistema sem controle e função de ponderação W_{a1} usada para a aceleração.	76
4.10	9 possíveis respostas em frequência do deslocamento relativo da roda do sistema sem controle e função de ponderação $W_{k_{hpi}}$ relacionada ao deslocamento relativo da roda.	77
4.11	Resposta em frequência (aceleração) do sistema sem controlador e com controlador H_∞ projetado.	82
4.12	Resposta em frequência do sistema (deslocamento relativo da roda) sem controlador e com controlador H_∞ projetado.	83
4.13	Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).	85
4.14	Deslocamento relativo das rodas após aplicar um distúrbio (obstáculo).	88
4.15	Potência necessária na suspensão dianteira necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	91
4.16	Potência necessária na suspensão traseira necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	92
4.17	Potência necessária na suspensão dianteira necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	94
4.18	Potência necessária na suspensão traseira necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	95
4.19	Resposta em frequência (aceleração) do sistema sem controlador e com controlador H_∞ projetado.	101
4.20	Resposta em frequência do sistema (deslocamento relativo da roda) sem controlador e com controlador H_∞ projetado.	102

4.21	Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).	104
4.22	Deslocamento relativo das rodas após aplicar um distúrbio (obstáculo).	107
4.23	9 possíveis respostas em frequência da aceleração vertical do veículo do sistema sem controle e função de ponderação W_{a1} usada para a aceleração.	110
4.24	9 possíveis respostas em frequência do deslocamento relativo da roda do sistema sem controle e função de ponderação W_{khp_i} relacionada ao deslocamento relativo da roda.	111
4.25	Resposta em frequência (aceleração) do modelo de sete graus de liberdade, sem controlador e com controlador H_∞ .	120
4.26	Resposta em frequência (deslocamento relativo das 4 rodas) do sistema sem controlador e com controlador H_∞ .	121
4.27	Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).	123
4.28	Deslocamento relativo das rodas após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).	126
4.29	Potência necessária para controle da suspensão traseira esquerda necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	129
4.30	Potência necessária para controle da suspensão dianteira esquerda necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	130
4.31	Potência necessária para da suspensão dianteira direita necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	131
4.32	Potência necessária para da suspensão traseira direita necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	132
4.33	Potência necessária na suspensão traseira esquerda para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	134
4.34	Potência necessária na suspensão dianteira esquerda para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	135
4.35	Potência necessária na suspensão dianteira direita para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	136
4.36	Potência necessária na suspensão traseira direita para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).	137

4.37	Resposta em frequência (aceleração) do sistema sem controlador e com controlador H_∞ projetado.	145
4.38	Resposta em frequência do sistema (deslocamento relativo da roda) sem controlador e com controlador H_∞ projetado.	146
4.39	Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).	148
4.40	Deslocamento relativo das rodas após aplicar um distúrbio (obstáculo).	151
5.1	Diagrama de corpo livre do modelo de 2 graus de liberdade (hipótese $x_1 > x_2 > w$)	162
5.2	Diagrama de corpo livre para o modelo de 4 graus de liberdade (hipótese $x_1 > x_2 > w_f$ e $x_1 > x_3 > w_t$) e pequenas deflexões angulares.	164
5.3	Diagrama de corpo livre para o modelo de 7 graus de liberdade (pequenas deflexões angulares).	168

Notação

No presente trabalho as letras minúsculas em negrito denotam vetores e as letras maiúsculas em negrito representam matrizes.

A nomenclatura usada é:

- **I**: Matriz identidade;
- **A'**: Matriz **A** transposta;
- **A** > 0: Matriz **A** é simétrica e positiva definida;
- **||A||**: Norma euclidiana da matriz **A**;
- $\lambda_i(\mathbf{A})$: Autovalor λ_i da matriz **A**;
- $\lambda_{max}(\mathbf{A})$: Maior autovalor da matriz **A**;
- **G(s)**: Função de transferência;
- **G(s)**: Matriz de transferência;
- **||G(s)||_∞**: Norma infinito da matriz de transferência **G(s)**, ou seja, representa o pico da resposta em frequência de **G(s)**;
- **i**: Unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$;
- **s**: Variável no domínio da transformada de Laplace.
- SISO: Denotação para sistemas de uma entrada e uma saída, do inglês *Simple Input Simple Output*;
- MIMO: Denotação para sistemas de mais de uma entrada e mais de uma saída, do inglês *Multiple Input Multiple Output*;
- GDL: Graus de Liberdade.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A indústria automobilística tem investido em acessórios de conforto e segurança para os passageiros, tais como conjuntos de freios, *Air Bag*, sistemas de troca de marchas, aerofólios, etc. Um desses acessórios, que possui um grande potencial de desenvolvimento, é a suspensão ativa.

A suspensão ativa é uma tecnologia automotiva que permite controlar os movimentos verticais das rodas e do veículo. Ao contrário do sistema de suspensão comum (suspensão passiva), a suspensão ativa compensa as imperfeições da pista com mais eficiência, controlando os movimentos verticais relativos de cada roda. Isto permite fornecer mais estabilidade ao veículo, seja em curvas, aceleração ou frenagem, e assim facilitando a dirigibilidade para o motorista. Também procura atuar na aceleração vertical do veículo, melhorando o conforto para os passageiros [36]. Estas vantagens motivaram muitos estudos nesta área e desenvolvimento de novas suspensões.

A dirigibilidade de um veículo depende do tipo de perfil da pista e da velocidade que o veículo se desloca, caracterizando entradas que podem ser muito diferentes em termos da distribuição de frequências. O conforto dos passageiros dependerá da resposta à esta excitação e envolve usualmente as acelerações do veículo. Este problema pode caracterizar um problema de otimização multi-objetivo, cujos sistemas ativos apresentam maior potencial de satisfazer as especificações de

desempenho desejadas.

1.2 Breve histórico dos sistemas de suspensão

Nos primeiros veículos automotores os eixos eram fixados diretamente à estrutura do veículo, causando um desconforto aos passageiros devido às condições das estradas. Com o passar dos anos, foram introduzidas molas entre o eixo e a carroceria, separando os movimentos verticais das rodas do movimento vertical do veículo, melhorando assim o conforto [23].

Com o desenvolvimento de carros mais velozes, a solução baseada em molas tornou-se inadequada, pois ao passar por uma irregularidade na pista, o veículo oscilava comprometendo a estabilidade e dificultando a dirigibilidade do veículo. Como solução para esse problema foram criadas as suspensões veiculares com elementos dissipativos [36].

As funções da suspensão são maximizar o atrito entre o pneu e o solo, de modo a fornecer estabilidade do veículo, e assegurar o conforto dos passageiros [36].

Ao passar por uma irregularidade qualquer na pista, as rodas do veículo reagem com movimentos perpendiculares em relação ao solo. Sem uma estrutura que intervenha, toda a energia do movimento vertical das rodas é transferida para o chassi e, em alguns casos, as rodas podem perder o contato com o solo. Logo, é necessário um sistema de amortecimento, permitindo que o chassi seja menos afetado enquanto as rodas seguem as ondulações do solo [36].

O amortecedor, portanto, diminui a amplitude das oscilações da suspensão, procurando manter as rodas do veículo em contato permanente com o solo, e estabilizando a carroceria. Além disso, melhora o conforto, a segurança e previne o desgaste excessivo dos componentes da suspensão e pneus. Normalmente, seu funcionamento é baseado em mecanismos que regulam a passagem do óleo de uma câmara para outra [36].

Alguns tipos de suspensões são:

- Suspensões de eixo rígido, onde são montadas as rodas dianteiras. Esta suspensão é parecida com uma barra sólida sob a parte dianteira do veículo, mantida no lugar pelo feixe de molas e amortecedores. Esta suspensão é muito usada em picapes. Apesar de ser uma suspensão

simples e de baixo custo, compromete largamente o conforto e as características dinâmicas do veículo [11].

- Coluna McPherson, que foi desenvolvida por Earle S. McPherson em 1947, geralmente é usada em veículos com tração dianteira. Consiste em um sistema de suspensão dianteira que permite as rodas se movimentarem de maneira independente [11]. Combina uma mola helicoidal e um amortecedor num mesmo conjunto, compactando a suspensão e a deixando mais leve.
- Sistema de suspensão de braços triangulares, que usa dois braços triangulares para localizar a roda. O braço triangular possui dois pontos de articulação no chassi e um ponto de articulação na roda, um amortecedor e uma mola helicoidal para absorver vibrações. Permite maior controle sobre o ângulo de inclinação das rodas (cambagem). Além disso, este sistema minimiza a rolagem ou balanço, permitindo assim uma direção mais firme. Esse sistema é muito comum na parte dianteira dos carros grandes [11].

As suspensões acima são consideradas suspensões passivas, pois estas não possuem um atuador em sua estrutura. Além das suspensões passivas existem também as suspensões semi-ativas, que variam a constante de amortecimento do amortecedor.

Como descrito no início deste capítulo, a suspensão ativa possui um grande potencial de desenvolvimento tecnológico. Seu interesse está em compensar imperfeições na pista com maior eficiência que a suspensão passiva, melhorando a segurança e o conforto dos passageiros simultaneamente. As suspensões ativas utilizam atuadores, cuja ação é comandada pelo sinal de saída de um controlador, que possibilitam modificar as características dinâmicas do sistema em tempo real. Salienta-se o compromisso entre melhorar o desempenho e o custo do projeto. Atualmente, a suspensão ativa ainda pode ser considerada uma alternativa de maior custo que a suspensão passiva.

Um primeiro protótipo com um sistema de suspensão ativa foi construído em 1972, e instalado em um veículo Rover. Este sistema era altamente sensível, com rápida ação de autonivelamento. Era constituído de uma bomba e um sistema hidráulico que acionava os atuadores de cada roda através de válvulas. As válvulas eram acionadas por um sistema de pêndulos que detectava as acelerações do veículo [23].

Quinze anos depois, na Fórmula 1, a Lotus utilizou esse mesmo princípio, porém seu sistema era comandado por acelerômetros e um microcomputador [23]. Esse sistema de suspensão obteve muito sucesso nas provas de baixas velocidades, como, por exemplo, a de Mônaco. No entanto a suspensão ativa foi banida da Fórmula 1 em 1995 devido aos novos regulamentos das competições.

Em 1996 a Ford lançou um projeto com um sistema chamado CVRSS (*Continuous Variable Road-Sensing Suspension* - suspensão com sensoramento contínuo de estrada variável), composto por uma série de sensores que acionam os amortecedores hidráulicos das rodas, melhorando as condições de amortecimento e conforto [23].

Em 1999 a Land Rover criou o sistema ACE (*Active Cornering Enhancement* - acessório ativo para curvas), sendo o pioneiro em veículos utilitários. Esse sistema baseia-se na substituição das barras estabilizadoras da suspensão dianteira e traseira por um sistema hidráulico, composto por uma bomba hidráulica e quatro atuadores. Os atuadores entram em ação toda vez que o veículo inclina, aplicando um torque ao chassi. A capacidade de reação é alta e este sistema permite que o veículo faça curvas praticamente sem inclinação da carroceria em relação ao solo [23].

Desde 2000 a Mercedes-Benz oferece um sistema totalmente ativo, o ABC (*Active Body Control* - controle ativo do corpo). Esse sistema cria barras estabilizadoras virtuais, com resistência variável. À medida que a velocidade aumenta, ele estimula a tendência de subesterço (saída de frente), enrijecendo os braços da suspensão dianteira e amolecendo os braços da suspensão traseira, de acordo com padrões de comportamento definidos no programa do computador. Se o sistema reagir mais rapidamente, os braços inferiores da suspensão dianteira atuam de modo a propiciar maior precisão no contorno de curvas. Outra característica do sistema ABC é que seu tempo de estabilização é muito menor que o de uma suspensão convencional [23].

A suspensão ativa também é encontrada em veículos agrícolas, como, por exemplo, em pulverizadores. Seu funcionamento pode ser feito de duas formas [6]:

- Na arrancada: Ao sair do repouso, há uma tendência de transferir boa parte do peso do equipamento para a parte traseira, causando perda de tração na parte dianteira. Com a instalação da suspensão ativa, um sistema de atuação permite baixar a frente da máquina evitando a perda de tração.
- Na subida: Ao subir um terreno, ocorre a mesma tendência do caso anterior. Além disso,

qualquer irregularidade do terreno pode fazer com que uma das rodas dianteira perca contato com o solo. A suspensão dianteira reage empurrando a roda contra o solo, ao mesmo tempo em que retrai a suspensão traseira. O resultado desse processo é o maior contato das duas rodas com o solo, melhorando o desempenho da máquina.

A suspensão ativa também está presente em algumas empilhadeiras. Instalada no eixo traseiro, controla a estabilidade do veículo, monitorando-o e também interrompendo o balanço do eixo traseiro. Isso melhora o contato com o solo, estabilidade e manejo nos trabalhos rápidos, reduzindo o risco de instabilidade da empilhadeira [34].

1.3 Objetivos do trabalho

Esse trabalho tem o objetivo de estudar a aplicação da técnica de controle H_∞ , baseada na formulação por LMI, aos modelos de suspensões veiculares com 2, 4 e 7 graus de liberdade, comparando os sistemas com suspensão passiva (sem controlador) e com suspensão ativa (com controlador).

O interesse no controle H_∞ está no fato de que sua obtenção pode ser feita através da solução de problemas de otimização. Além disso, estes problemas de otimização podem ser baseados no uso de Desigualdade Matriciais Lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities*, ou LMI), que é um tipo de formulação que proporciona uma flexibilidade na formulação de problemas de otimização, e também possui algoritmos eficientes para a solução.

O controlador obtido leva em conta funções de ponderação para contemplar a distribuição de frequência dos critérios de desempenho adotados e do esforço de controle, e incertezas de modelagem, tendo em vista as variações da massa do veículo, do amortecimento da suspensão e da rigidez do pneu. Serão verificadas as respostas em frequência dos modelos, e as respostas no tempo simulando a situação de passagem por um obstáculo.

A contribuição principal deste trabalho é o projeto do controlador considerando incertezas paramétricas de modelagem nos modelos usuais de suspensão, usando as formulações baseadas em desigualdades matriciais lineares.

As simulações foram feitas utilizando o software *MATLAB* 7.4. Nestas, foram utilizados o Yalmip e o Sedumi, que são pacotes livres para a solução de problemas de otimização feitos para o *MATLAB*.

1.4 Breve Revisão Bibliográfica

Em 1971, Thompson [31] analisou o comportamento dinâmico do modelo de uma suspensão veicular com 2 graus de liberdade. A implementação deste sistema consistia num atuador ligado em paralelo com uma mola, alimentado unicamente pela medida da aceleração vertical do veículo. O autor observou que para obter resultados melhores era necessário considerar como distúrbio proveniente da via grandes movimentos da roda. Estas amplitudes causavam perda de dirigibilidade e, para minimizá-las, investigou a possibilidade de acoplar um absorvedor dinâmico à suspensão.

Em 1976, Thompson [32] utilizou técnicas de controle ótimo. A otimização foi baseada na teoria LQR (*linear quadratic regulator* - regulador linear quadrático). O resultado final obtido possuía uma implementação prática viável.

Em 1984, Thompson [33] projetou um modelo de suspensão ativa que podia ser acoplado a uma mola de rigidez qualquer. Para que isso fosse possível, alterou a lei de controle de forma a incluir um termo extra de rigidez. Verificou também que o sistema final podia ser implementado utilizando-se unicamente a medida do deslocamento relativo entre o corpo principal e o eixo, evitando o deslocamento relativo entre o corpo e a via.

Em 1987, Chalasani [7] fez dois trabalhos: um deles foi sobre o potencial de melhorar o desempenho de uma suspensão ativa para um modelo de 2 graus de liberdade e o outro para um modelo de 7 graus de liberdade. No primeiro, a dirigibilidade (que é a qualidade em poder guiar um veículo, podendo ser melhorada aumentando o contato dos pneus no solo) era dada pela velocidade da roda, ao invés do seu deslocamento. Este trabalho concluiu que o sistema ativo possuía uma aceleração vertical do corpo 15% inferior à do sistema sem controle. Já no segundo trabalho, foram obtidos resultados similares aos do modelo de 2 graus de liberdade, concluindo que o modelo de 7 graus de liberdade poderia ser utilizado para conceitos fundamentais. Porém, caso houvesse a necessidade de verificar o balanço (movimento de *pitch* do veículo, ou seja, movimento de rotação

do veículo em torno do eixo transversal) e a rolagem (movimento de *yaw* do veículo, ou seja, movimento de rotação do veículo em torno do eixo longitudinal), deve-se utilizar o modelo de 7 graus de liberdade.

Em 1986, Karnopp [14] baseou-se nas funções de transferência ideais entre a via e o eixo e a via e o corpo. Concluiu que uma suspensão ativa por realimentação completa de estado não oferecia grandes vantagens sobre o sistema passivo ou semi-ativo, principalmente quando visto pela relação custo-benefício, pois na época o custo de uma suspensão ativa era muito grande para um ganho de performance não tão expressivo.

Em 1991, Crolla e Abdel-Hardy [8] estenderam o estudo para o modelo de 7 graus de liberdade, e elMadany e Abduljabbar [10] compararam o sistema ativo com o sistema semi-ativo, investigando também a disponibilidade completa dos estados para realimentação.

Em 1992, Kashani e Kiriczi [15] estudaram a estabilidade robusta de uma suspensão ativa usando o controlador LQG. Reformularam o problema LQG em termos do problema H_2 no domínio da frequência. Incorporaram na formulação do problema H_2 incertezas estruturadas, representando as variações paramétricas do sistema e projetaram o controlador baseando-se no teorema do ganho pequeno (*Small Gain Theorem*).

Em 1995, Teramura [30] conseguiu a patente de um controlador que variava o amortecimento da suspensão veicular. Matematicamente, este controlador atenua a velocidade vertical do veículo baseado na aceleração vertical do mesmo, selecionando assim o amortecimento necessário.

Ainda em 1995, Shimamune e Tanifuji [27] aplicaram um atuador hidráulico para uma suspensão ativa em trens, comparando resultados experimentais com resultados teóricos obtidos num sistema bidimensional com controlador LQG. Os resultados mostraram que é possível controlar as vibrações do trem até a frequência de 12 Hz.

Ainda em 1996, elBeheiry e Karnopp [9] retomaram o estudo do problema de controle de uma suspensão automotiva via regulador LQG. Analisaram cinco tipos de suspensões: totalmente ativo, ativo limitado, passivo ótimo, amortecedor ativo e sistema com amortecedor variável. Estes casos foram estudados para isolamento de vibração com restrições no espaço de trabalho da suspensão.

Em 1997, Takahashi, Camino, Zampieri e Peres [29] apresentaram uma metodologia para otimização de uma suspensão ativa. Esse método pode ser aplicado a técnicas de controle que empreguem um funcional de custo sobre o conforto, o espaço de trabalho da suspensão e a di-

rigibilidade. Foram usados os controladores H_∞ e H_2 com realimentação de estados. Com isso, obteve-se uma solução que permitiu especificações das restrições sobre os controladores em termos dos objetivos primários.

Em 1998, Camino [5] aplicou as teorias de controle H_2 e H_∞ via LMI (*Linear Matrix Inequalities* - desigualdades matriciais lineares) e a parametrização Youla em suspensões ativas. Abordou três modelos dinâmicos diferentes: com 2, 4 e 7 graus de liberdade. Simulações numéricas foram efetuadas para cada modelo dinâmico, onde a comparação foi feita baseada na tríade força de controle, espaço de trabalho da suspensão e dirigibilidade. A partir do controlador projetado sem levar em conta as incertezas de modelagem, verificou-se a resposta do mesmo ao se variar em 15% os valores da massa do veículo, da rigidez do pneu e do coeficiente de amortecimento da suspensão.

Em 1999, Hayakawa, Matsumoto, Yamashita, Suzuki, Fujimori e Kimura [12] aplicaram um controlador projetado baseado nas técnicas de controle H_∞ em um veículo de passeio, demonstrando na prática a melhoria no conforto quando se utiliza a suspensão ativa.

Em 2000, Sammier, Senname e Dugard [24] aplicaram o controlador H_∞ para um modelo de 4 graus de liberdade multivariável, verificando que o controlador H_∞ satisfaz os parâmetros de conforto. No estudo, foi utilizado um filtro (função) de ponderação na modelagem do problema com uma frequência de corte de 10 Hz, possibilitando assim um melhor controle da vibração até esta frequência.

Em 2001, Bouzara e Richard [2] analisaram os efeitos de vibrações no conforto de veículos, variando parâmetros da suspensão tais como coeficientes de rigidez do pneu, amortecimento da suspensão, distúrbios da estrada e posição do assento, através de um modelo dinâmico tridimensional. Os resultados obtidos demonstraram que o uso da suspensão ativa e semi-ativa beneficiava o conforto dos passageiros.

Em 2002, Smith e Wang [19] analisaram os diferentes modelos veiculares (com 2, 4 e 7 graus de liberdade) sob dois diferentes distúrbios: irregularidades nas estradas e aplicação de forças no veículo, e utilizaram as técnicas de controle H_∞ em seu estudo para controle da vibração.

Em 2004, Kruczek e Stribrsky [17] estudaram o modelo de 7 graus de liberdade com suspensão ativa, considerando também os passageiros no veículo como graus de liberdade e discutiram condições extremas, como impacto, aceleração, desaceleração, e outros no modelo.

Em 2006, Akbari e Lohman [1] estudaram controladores robustos de baixa ordem aplicados

em veículos com suspensão ativa. O modelo de 2 graus de liberdade foi utilizado no estudo. Um controlador H_∞ trouxe maior conforto ao sistema sem sacrificar a segurança. O controlador foi projetado levando em conta uma função de ponderação.

1.5 Organização deste trabalho

O Capítulo 1 deste trabalho apresenta uma introdução das suspensões passivas e ativas, um breve histórico do sistema de suspensões ativas, os objetivos desse trabalho e uma breve revisão bibliográfica.

O Capítulo 2 apresenta conceitos básicos, tais como a formulação H_∞ por LMI, funções de ponderações e incertezas no sistema. Estes aspectos caracterizam a base da formulação usada para o projeto dos controladores neste trabalho.

O Capítulo 3 trata da aplicação do controle H_∞ na suspensão ativa, a partir dos conceitos do Capítulo 2.

O Capítulo 4 apresenta os resultados das simulações propostas no Capítulo 3, tais como respostas em frequência e respostas temporais.

As conclusões deste trabalho estão no Capítulo 5, bem como algumas sugestões para próximos trabalhos.

Os modelos matemáticos para suspensão ativa são apresentados no Anexo A. O anexo B apresenta o resultado da aplicação do complemento de Shur a uma equação deduzida no Capítulo 2.

Capítulo 2

Controladores H_∞ por LMI

O emprego dos controladores H_∞ é atrativo, pois sua obtenção pode ser feita através da solução de problemas de otimização, baseados no uso de LMI, que causa flexibilidade na formulação de problemas de otimização, e também possui algoritmos eficientes para a solução. O projeto H_∞ pode ser usado com a finalidade de manter um determinado desempenho num sistema sob condições adversas tais como erros de modelagem e distúrbios externos [26].

Em termos gerais deseja-se, através de um método de otimização no domínio da frequência, reduzir os efeitos de distúrbios externos e ruídos de sensores no problema de controle tendo em vista o pior caso, ou seja, o valor de pico da função de resposta em frequência. O Anexo C traz a definição da norma H_∞ .

2.1 Problema H_∞

A Figura 2.1 ilustra a representação usual do problema H_∞ .

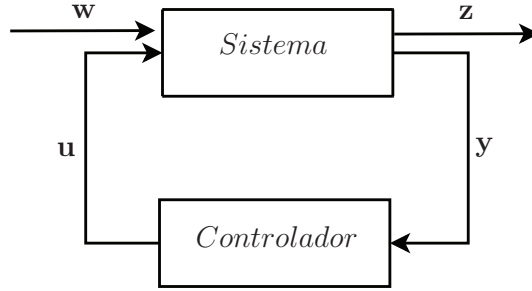


Figura 2.1: Representação dinâmica do problema H_∞

Um sistema dinâmico pode ser representado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}, \quad (2.3)$$

onde:

- \mathbf{w} é a entrada exógena do problema (sinal de referência, distúrbio, ruído);
- \mathbf{u} é o vetor do sinal de controle;
- \mathbf{z} é a medida do desempenho;
- \mathbf{y} é o sinal medido usado para a realimentação;
- \mathbf{A} é a matriz dinâmica do sistema;
- \mathbf{B}_1 é a matriz que determina onde \mathbf{w} é aplicado;
- \mathbf{B}_2 é a matriz que determina onde \mathbf{u} é aplicado;
- \mathbf{C}_1 é a matriz que determina o sinal de desempenho;
- \mathbf{D}_{11} é a matriz que determina, no sinal de desempenho, onde \mathbf{w} é aplicado;
- \mathbf{D}_{12} é a matriz que determina, no sinal de desempenho, onde \mathbf{u} é aplicado;
- \mathbf{C}_2 é a matriz que determina o sinal de medição;

- D_{21} é a matriz que determina, no sinal de medição, onde w é aplicado;
- D_{22} é a matriz que determina, no sinal de medição, onde u é aplicado;

Para facilitar a formulação, será considerado inicialmente D_{22} nulo. Neste caso tem-se a saída medida chamada de y e dada por:

$$y = C_2 x + D_{21} w. \quad (2.4)$$

Será projetado um controlador dinâmico, tal que:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y; \quad (2.5)$$

$$u = C_c x_c. \quad (2.6)$$

Substituindo as equações (2.5) e (2.6) em (2.1), (2.2) e (2.3), tem-se:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 C_c x_c; \quad (2.7)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} C_c x_c. \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

Substituindo (2.4) em (2.5) tem-se:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c C_2 x + B_c D_{21} w. \quad (2.10)$$

Considerando:

$$\tilde{x} = \begin{Bmatrix} x \\ x_c \end{Bmatrix},$$

pode-se escrever que:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} w, \quad (2.11)$$

$$z = \tilde{C} \tilde{x} + \tilde{D} w, \quad (2.12)$$

onde as matrizes de malha fechada são:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}; \quad (2.13)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}; \quad (2.14)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c \end{bmatrix}; \quad (2.15)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_{11}. \quad (2.16)$$

O objetivo do controlador H_∞ , conforme descrito no início do capítulo, é reduzir o valor da norma H_∞ , minimizando o efeito do distúrbio exógeno na saída de desempenho do sistema e mantendo o sistema em malha fechada estável.

Segundo Sánchez-Penã e Sznair [25] a função de transferência do sistema de malha fechada pode ser descrita por:

$$\mathbf{H}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}},$$

as duas afirmações seguintes são equivalentes:

- $\|\mathbf{H}_\infty\| < \gamma$;
- Existe $\tilde{\mathbf{P}}$ positivo-definida (matriz simétrica com autovalores positivos) tal que:

$$\tilde{\mathbf{A}}'\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}} + (\tilde{\mathbf{C}}'\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{B}})\gamma^{-2}(\tilde{\mathbf{D}}'\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{B}}'\tilde{\mathbf{P}}) + \tilde{\mathbf{C}}'\tilde{\mathbf{C}} < 0, \quad (2.17)$$

onde γ é o valor máximo da norma H_∞ . A equação (2.17) é conhecida como equação de Riccati [37].

O objetivo do controle H_∞ é minimizar o valor de γ , satisfazendo a condição de que a norma H_∞ da matriz de transferência entre a saída de desempenho e a entrada exógena apresente um valor menor que γ . Além dessa restrição, o problema de otimização deverá satisfazer a equação de Riccati (2.17). Este problema pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \min \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a:} \\ \tilde{\mathbf{A}}'\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}} + (\tilde{\mathbf{C}}'\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{B}})\gamma^{-2}(\tilde{\mathbf{D}}'\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{B}}'\tilde{\mathbf{P}}) + \tilde{\mathbf{C}}'\tilde{\mathbf{C}} < 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

No problema de controle ativo das suspensões deste trabalho, o objetivo será minimizar a norma H_∞ da função de transferência entre o sinal de saída (ou desempenho) e os sinais de entrada no domínio da frequência. Uma das técnicas mais recentes para essa minimização é o emprego das formulações baseadas em desigualdades matriciais lineares.

2.2 Desigualdade Matriciais Lineares

As desigualdades matriciais lineares, ou LMI, apareceram no fim do século XIX, no artigo em que Lyapunov discute a estabilidade de sistemas dinâmicos. A área de sistemas de controle possui muitas aplicações desse conceito devido à sua simplicidade algébrica, além da existência de vários algoritmos computacionais eficientes para a solução de problemas formulados de acordo com este enfoque [20].

A desigualdade positivo-definida,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{x}_1\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{x}_n\mathbf{F}_n > \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

onde \mathbf{x}_i é um vetor de variáveis de decisão ou de otimização e \mathbf{F}_i são matrizes simétricas e conhecidas, recebe o nome de LMI [3]. Na maioria dos casos não é conveniente escrever uma LMI nesta forma padrão. Logo, LMI é qualquer desigualdade matricial equivalente à desigualdade na forma padrão, como por exemplo, $\mathbf{F}_i(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$.

Uma propriedade da LMI é que o conjunto $\{\mathbf{x} / \mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}\}$ é um conjunto convexo [20], sendo este resultado importante no contexto dos problemas de otimização.

Uma propriedade útil para a conversão de desigualdades matriciais não lineares em desigualdades matriciais lineares é o complemento de Schur [3], apresentado a seguir.

A inequação matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}'(\mathbf{x}) & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

com $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}'(\mathbf{x})$ e $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}'(\mathbf{x})$ é equivalente à:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{S}'(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

ou ainda

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{S}'(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

2.3 Controlador H_∞

Uma das formas para resolver o problema apresentado pela equação (2.18) utilizando a formulação de LMI é eliminar a não linearidade dos termos $\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}'\tilde{\mathbf{P}}$, pois tanto $\tilde{\mathbf{P}}$ como $\tilde{\mathbf{B}}$ envolvem incógnitas do problema. É possível aplicar algumas transformações e mudanças de variáveis para transformar este tipo de termo em termos lineares matricialmente, como apresentado a seguir [25].

Sejam as matrizes positivo definidas:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}' \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix}; \quad (2.23)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}; \quad (2.24)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Segundo Sanchez-Penã e Sznair [25], ao calcular $\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ encontra-se:

$$\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}' \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{XY} + \mathbf{U}'\mathbf{V} & \mathbf{XV}' + \mathbf{U}'\hat{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{UY} + \hat{\mathbf{X}}\mathbf{V} & \mathbf{UV}' + \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}, \quad (2.26)$$

onde:

- \mathbf{X} e \mathbf{Y} são variáveis matriciais simétricas que serão determinadas na resolução do problema de otimização com restrições na forma de LMI;
- \mathbf{U} é uma matriz invertível arbitrária;
- \mathbf{V} é uma matriz calculada a partir de \mathbf{U} , \mathbf{X} e \mathbf{Y} .

Congruência [25] é uma operação de mudança de variáveis. Ela assegura que os autovalores da matriz original e da matriz transformada sejam os mesmos. Seja a forma quadrática:

$$\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'\Theta\mathbf{a}, \quad (2.27)$$

onde Θ é uma matriz quadrada qualquer e \mathbf{a} é um vetor. Para explicar a transformação de congruência, supõe-se que:

$$\mathbf{a} = \Psi\mathbf{b}, \quad (2.28)$$

onde Ψ é uma matriz quadrada com as mesmas dimensões de Θ . Substituindo a equação (2.28) na equação (2.27), é possível obter:

$$\mathbf{J}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}'\Psi'\Theta\Psi\mathbf{b}. \quad (2.29)$$

A partir da equação (2.29), é possível escrever que $\Psi'\Theta\Psi = \Pi$, onde Π é chamada de matriz congruente a Θ . Logo, a transformação $\Theta \rightarrow \Psi'\Theta\Psi$, com Ψ não-singular, é denominada transformação de congruência. Se $\Theta > \mathbf{0}$ então $\Pi > \mathbf{0}$ [22].

Como a matriz $\tilde{\mathbf{P}}$ é positivo-definida, uma transformação de congruência dela também resultará uma matriz positivo definida [25]. Portanto:

$$\tilde{\mathbf{P}} > \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{\mathbf{T}}'\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{T}} > \mathbf{0}, \text{ então,}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}'\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{T}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}' \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{XY} + \mathbf{U}'\mathbf{V} & \mathbf{X} \\ \mathbf{UY} + \hat{\mathbf{X}}\mathbf{V} & \mathbf{U} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{YX} + \mathbf{V}'\mathbf{U} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pode-se concluir que

$$\tilde{\mathbf{T}}' \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (2.30)$$

Aplicando o complemento de Schur na equação (2.17), obtém-se [25]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}' \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}} \\ \tilde{\mathbf{B}}' \tilde{\mathbf{P}} & \tilde{\mathbf{D}}' & -\gamma^{-2} \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

O resultado de (2.31) pode ser verificado no anexo B.

É necessário expressar a equação (2.31) em termos das variáveis do problema e das demais variáveis introduzidas para auxiliar a transformação do problema em LMI [25]. Para isso, pré

multiplica-se a equação (2.31) por $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ e pós multiplica-se por $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}' \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}' & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}} \\ \tilde{\mathbf{B}}' \tilde{\mathbf{P}} & \tilde{\mathbf{D}}' & -\gamma^{-2} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0};$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}' \tilde{\mathbf{A}}' \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}' \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{T}}' \tilde{\mathbf{C}}' & \tilde{\mathbf{T}}' \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{T}} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}} \\ \tilde{\mathbf{B}}' \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{D}}' & -\gamma^{-2} \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (2.32)$$

Segundo Sanchez-Penã e Sznair [25], calculando $\tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{T}}$ obtem-se:

$$\tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}_c \mathbf{V}. \quad (2.33)$$

Calculando $\tilde{\mathbf{B}}' \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}}$, pode-se escrever [25]:

$$\tilde{\mathbf{B}}' \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_1 & \mathbf{B}'_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{L}' \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}'\mathbf{B}_c. \quad (2.34)$$

Calculando $\tilde{\mathbf{T}}'\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{T}}$ obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{T}}'\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} \\ \mathbf{M} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{M} = \mathbf{XAY} + \mathbf{XB}_2\mathbf{F} + \mathbf{LC}_2\mathbf{Y} + \mathbf{U}'\mathbf{A}_c\mathbf{V}. \quad (2.35)$$

Assim, o problema de otimização H_∞ na forma LMI torna-se [25]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{YA}' + \mathbf{F}'\mathbf{B}_2' & \mathbf{A} + \mathbf{M}' & \mathbf{YC}_1' + \mathbf{F}'\mathbf{D}_{12}' & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}' + \mathbf{M} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{A}'\mathbf{X} + \mathbf{C}_2'\mathbf{L}' & \mathbf{C}_1' & \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1' & \mathbf{B}_1'\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}'\mathbf{L}' & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

As incógnitas do problema de otimização (2.36) são: \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{L} , \mathbf{F} , \mathbf{M} e μ . Das relações obtidas no cálculo de $\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$, pode-se determinar uma relação entre \mathbf{V} e \mathbf{U} . Nesta formulação é possível considerar \mathbf{U} arbitrário, porém invertível, e calcular \mathbf{V} da seguinte forma [25]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{XY}) \quad (2.37)$$

Logo, pode-se encontrar as matrizes de estado do controlador através da solução do problema de otimização (2.36) [25]:

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{FV}^{-1} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{U}'^{-1}\mathbf{L} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{U}'^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{XAY} - \mathbf{XB}_2\mathbf{F} - \mathbf{LC}_2\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1} \quad (2.40)$$

2.3.1 Caso de D_{22} não nula

A formulação da seção anterior foi feita para o caso de D_{22} nula. Porém, nem sempre isso ocorre, como é o caso de se ter acelerações como saída de desempenho [16]. Há a necessidade, portanto, de corrigir o sinal de realimentação. O sinal de realimentação corrigido é dado pela equação (2.41):

$$\hat{y} = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u. \quad (2.41)$$

Associando a equação (2.4) à equação (2.41), obtém-se:

$$y = \hat{y} - D_{22} u. \quad (2.42)$$

O controlador dinâmico projetado na seção anterior, e rerepresentado nesta seção, é:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c y; \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c. \end{aligned}$$

Substituindo a equação (2.42) na equação do controlador, pode-se escrever que:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c (\hat{y} - D_{22} u),$$

e como

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c, \quad (2.43)$$

pode-se obter:

$$\mathbf{x}_c = (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c D_{22} \mathbf{C}_c) \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \hat{y}, \quad (2.44)$$

onde as equações (2.44) e (2.43) representam o controlador para o caso de $D_{22} \neq 0$ usando as matrizes \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c e \mathbf{C}_c obtidas com o projeto anterior que considerou $D_{22} = 0$. A correção para o caso de $D_{22} \neq 0$ (não nula) é portanto:

$$\hat{\mathbf{A}}_c = \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c D_{22} \mathbf{C}_c, \quad (2.45)$$

$$\hat{B}_c = B_c, \quad (2.46)$$

$$\hat{C}_c = C_c. \quad (2.47)$$

2.4 Funções de Ponderação

Função de ponderação é uma função utilizada na fase de projeto do controlador para ponderar as entradas exógenas e os sinais de controle no problema de otimização, de forma a obter controladores mais adequados às características do problema considerado [26].

A Figura 2.2 ilustra a planta aumentada do sistema, considerando as funções de ponderação incorporadas à planta original.

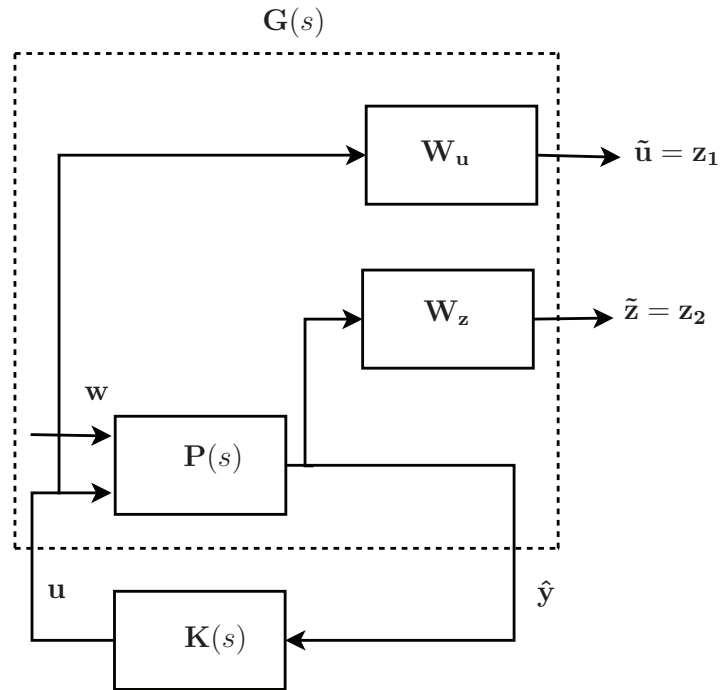


Figura 2.2: Planta aumentada do sistema com as funções de ponderação

Na Figura 2.2 verifica-se que:

- $P(s)$ é a planta original do sistema;
- $K(s)$ é o controlador do sistema;
- W_u é a função ponderadora para o sinal de controle;
- W_z é a função ponderadora para a saída de desempenho;
- $G(s)$ é a planta aumentada do sistema.

As funções de ponderação têm o objetivo de fazer com que a distribuição em frequência de interesse seja considerada. Estabelecendo a faixa de interesse em frequência dos sinais exógenos, pode-se projetar um controlador com menor conservadorismo. As funções de ponderação atuam de forma a fazer com que o conhecimento prévio do comportamento do sistema seja levado em consideração durante a fase de projeto do controlador. As funções de ponderação procuram fazer com que as funções de transferência de malha fechada apresentem um comportamento pré-definido. Sabendo, por exemplo, que um dado distúrbio exógeno afeta com maior intensidade a saída de desempenho na baixa frequência, pode-se incluir na fase de projeto do controlador uma ponderação (ou peso) que provoque uma atenuação da resposta a este distúrbio nesta faixa de frequência.

As funções de ponderação mais comuns são mostradas pela expressão (2.48) [25]:

$$H(s) = \lambda \left(\frac{s \sqrt[n]{A} + \omega_c}{s + \omega_c \sqrt[n]{B}} \right)^n, \quad (2.48)$$

onde ω_c é uma frequência corte e n é a ordem da função.

Atribuindo altos valores de amplitudes para frequências acima da frequência de corte e baixos valores de amplitudes para frequências inferiores a frequência de corte, pondera-se com menor intensidade a região de frequência menor que ω_c . Este tipo de função de ponderação é denominada de passa-alta.

Atribuindo baixos valores de amplitudes para frequência acima a uma dada frequência de corte e altos valores de amplitudes para frequências inferiores à frequência de corte, pondera-se com maior intensidade a região de frequência menor que ω_c . É esperado que a resposta a uma

excitação seja reduzida até a frequência de corte. Este tipo de função de ponderação é denominada de passa-baixa.

A Figura 2.3 ilustra a resposta em frequência das funções passa-baixa e passa-alta quando aplicadas à uma planta **P** qualquer.

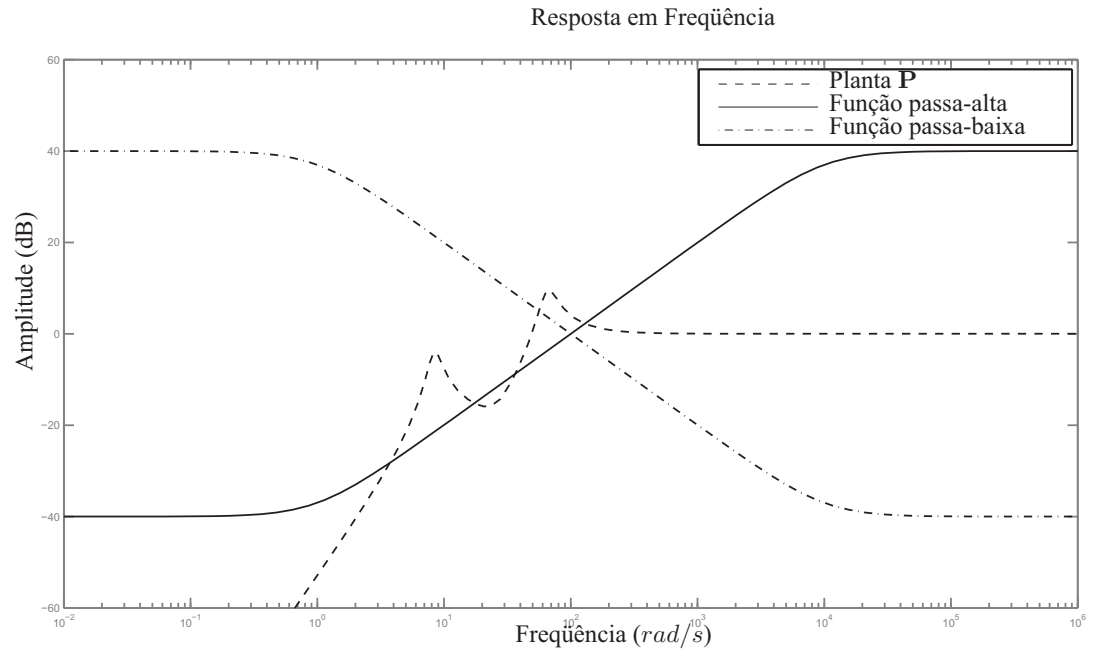


Figura 2.3: Ilustração de possíveis funções de ponderação.

Para exemplificar a aplicação das funções de ponderação, suponha uma planta **P** qualquer sujeita a um distúrbio. Ao incluir a função de ponderação W_z , por exemplo passa-baixa, com frequência de corte $w_c = 1 \text{ rad/s}$ observa-se a mudança da resposta em frequência da planta **G**. Nota-se que o uso dos filtros de ponderação permite enfatizar as regiões de frequência de interesse, e isso permitirá o projeto do controlador com base na planta **G**. Já nas frequências menores que w_c , as amplitudes da planta **P** deverão ser menores ou iguais que as amplitudes da planta aumentada **G**. Ou seja, com as funções de ponderação é possível ponderar a amplitude do sistema na faixa de frequência de interesse (no exemplo, as amplitudes para frequências maiores que 1 rad/s), penalizando as amplitudes nas diferentes faixas de frequência. A Figura 2.4 ilustra esse exemplo de aplicação.

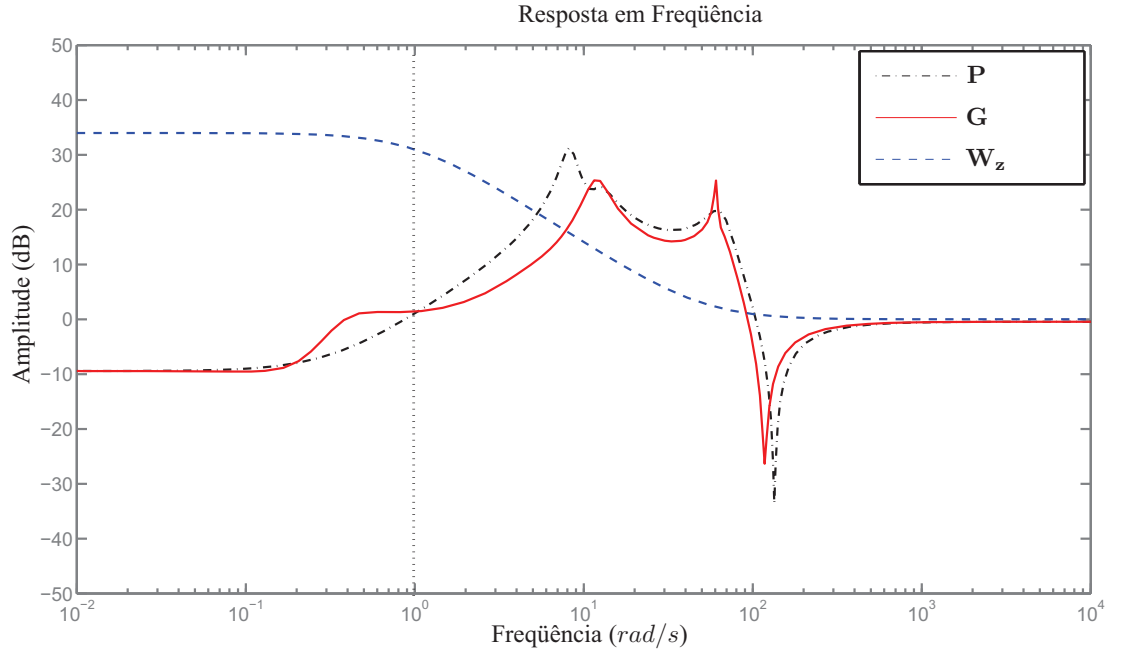


Figura 2.4: Exemplo de aplicação das funções de ponderação.

2.4.1 Formulação do problema H_∞ com as funções de ponderação

Seja o modelo da planta $P(s)$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad (2.49)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}. \quad (2.50)$$

O filtro de ponderação \mathbf{W}_z para o sinal de desempenho pode ser escrito na forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_z = \mathbf{A}_z\mathbf{x}_z + \mathbf{B}_z\mathbf{y}, \quad (2.51)$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_z\mathbf{x}_z + \mathbf{D}_z\mathbf{y}. \quad (2.52)$$

O filtro de ponderação \mathbf{W}_u para o esforço de controle pode ser escrito na forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{A}_u\mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u\mathbf{u}, \quad (2.53)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{D}_u \mathbf{u}. \quad (2.54)$$

Reescrevendo as equações (2.49), (2.50), (2.51), (2.52), (2.53), (2.54) obtém-se:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_u \\ \dot{\mathbf{x}}_z \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_1} \mathbf{w} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_u \\ \mathbf{B}_z \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2} \mathbf{u}, \quad (2.55)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_z \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}_1} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_z \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_{11}} \mathbf{w} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_z \mathbf{D}_{22} \\ \mathbf{D}_u \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}_{12}} \mathbf{u}, \quad (2.56)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \underbrace{\mathbf{C}_2}_{\bar{\mathbf{C}}_2} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{D}_{21}}_{\bar{\mathbf{D}}_{21}} \mathbf{w} + \underbrace{\mathbf{D}_{22}}_{\bar{\mathbf{D}}_{22}} \mathbf{u}. \quad (2.57)$$

Colocando as equações (2.54), (2.55) e (2.56) na forma compacta, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{z} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{B}}_2 \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{D}}_{11} & \bar{\mathbf{D}}_{12} \\ \bar{\mathbf{C}}_2 & \bar{\mathbf{D}}_{21} & \bar{\mathbf{D}}_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(s)} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix}, \quad (2.58)$$

onde $\mathbf{G}(s)$ é a nova planta aumentada do sistema que considera as ponderações \mathbf{W}_u e \mathbf{W}_z para fins de projeto.

2.5 Incertezas Paramétricas

Os parâmetros nominais do modelo podem sofrer variações em seus valores. Essas variações podem ser tratadas como incertezas de modelagem. O controlador H_∞ robusto tem o objetivo de manter o desempenho na presença de incertezas de modelagem, ou seja, espera-se que o controlador também leve a bons resultados para todos os pontos incertos levantados em seu projeto.

As incertezas podem ser classificadas em dois tipos: incertezas paramétricas e incertezas dinâmicas. As incertezas paramétricas são aquelas onde se desconhece o valor exato de certos parâmetros que compõe o modelo do sistema. As incertezas dinâmicas, como o próprio nome sugere, leva em conta erros associados à dinâmica da planta, ou seja, são originadas pela ausência da representação de certos efeitos dinâmicos, como por exemplo, o truncamento na ordem de modelos, desconsiderando certos modos de vibração [20].

Uma das formas de considerar as incertezas paramétricas no projeto de controle é através da abordagem politópica. Antes de explicar o conceito de incerteza politópica, é necessário relembrar os conceitos de conjunto e envelope convexo. Um conjunto S é convexo se e somente se para quaisquer pontos \mathbf{a}_1 e $\mathbf{a}_2 \in S$, o segmento de reta $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \rho \mathbf{a}_1 + (1 - \rho) \mathbf{a}_2$, onde $0 \leq \rho \leq 1$ também pertence a S . A Figura 2.5 ilustra o exemplo de conjunto convexo e não convexo [20].

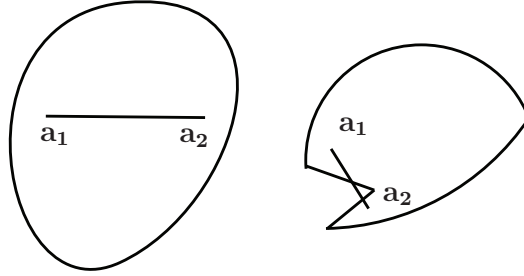


Figura 2.5: Exemplo de conjunto convexo e não convexo.

Seja o conjunto Y no E^n . O envelope convexo de Y , J , é a coleção de todas as combinações convexas de Y , ou seja, $\mathbf{x} \in J \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{x}_j, \sum_{j=1}^k \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, k, k$ inteiro e $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \in Y$. Politopo é o envelope convexo de um número finito de pontos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ no E^n . A Figura 2.6 ilustra o exemplo de envelope convexo.

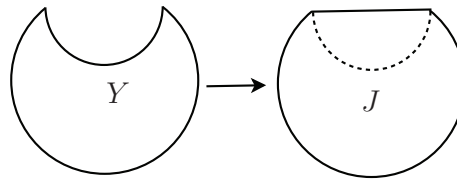


Figura 2.6: Exemplo de conjunto e seu respectivo envelope convexo.

Na abordagem politópica, considera-se que as matrizes de estado $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ da planta possuem parâmetros incertos, de modo que o quarteto $(\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\alpha), \mathbf{C}(\alpha), \mathbf{D}(\alpha))$, onde α é o vetor

dos parâmetros incertos do sistema, pertença a um conjunto admissível. Este é representado por pontos, que geram um conjunto convexo Φ , dado por:

$$\Phi = \left\{ (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \alpha_i > 0 \right\}. \quad (2.59)$$

Como exemplo, supõe-se um quarteto matricial dentro do domínio de Φ , que pode ser escrito como uma combinação convexa dos vértices $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})_i$ do politopo, como ilustrado na Figura 2.7. É assumido, neste trabalho, que o vetor dos parâmetros incertos, α , independam do tempo. Logo, o interesse é projetar um controlador robusto às variações dos parâmetros considerando seus extremos mínimos e máximos.

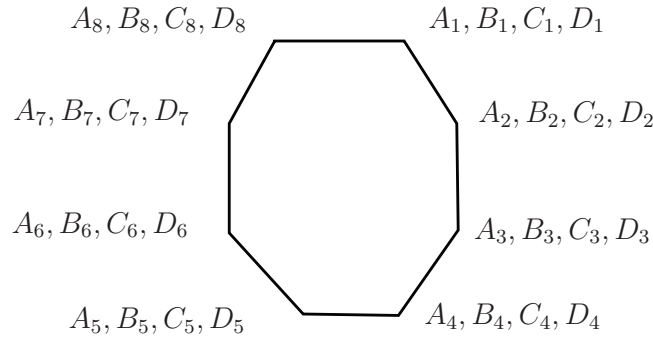


Figura 2.7: Exemplo de politopo formado pelos pontos extremos devido às incertezas paramétricas.

No caso da suspensão ativa, um dos parâmetros que sofre variação é a massa. Com isso, os sistemas extremos produzidos constituem em um poliedro multidimensional, e não necessariamente será um politopo convexo devido ao termo M^{-1} que surge nas equações de estado. Uma abordagem usual para essa perda de convexidade é a de tomar os sistemas extremos da representação politópica e determinar aqueles que compõem seu envelope convexo. Ao fazer isso, aumenta-se a região sobre a qual se estabelece a estabilidade e conseqüentemente aumenta-se o conservadorismo do controlador a ser projetado.

Uma forma de garantir a estabilidade do sistema é através do conceito de estabilidade quadrática. Seja $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}$, onde $\mathbf{P} > \mathbf{0}$, uma função de Lyapunov. Lyapunov [26] estabelece que um sistema é estável quando existe uma função $V(\mathbf{x})$ positiva e que a derivada $\dot{V}(\mathbf{x})$ desta função seja negativa, ou seja,

- $V(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ e } \forall t;$

- $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ e } \forall t.$

Seja um sistema linear na forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Neste caso, é possível verificar que:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x}'(\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} < 0,\end{aligned}\tag{2.60}$$

ou ainda

$$(\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}) < \mathbf{0}.\tag{2.61}$$

Desta forma, um sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é estável se existir $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ tal que a inequação de Lyapunov (2.61) seja satisfeita.

No caso de um sistema com incertezas paramétricas, é possível adotar uma restrição para cada vértice e resolver um problema matemático que inclui todas as restrições. Supondo que um sistema incerto pertença a um politopo de vértices \mathbf{A}_i , o sistema será estável se e somente se:

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i'\mathbf{P} < \mathbf{0}, i = 1, \dots, p.\tag{2.62}$$

A prova da equação (2.62) é verificada da seguinte forma. Seja um politopo convexo descrito por \mathbf{A}_i vértices. Os vértices do politopo serão estáveis se, e somente se:

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1'\mathbf{P} < \mathbf{0},\tag{2.63}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2'\mathbf{P} < \mathbf{0}, \dots\tag{2.64}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_p + \mathbf{A}_p'\mathbf{P} < \mathbf{0}.\tag{2.65}$$

Considere um sistema com matriz de estado \mathbf{A} no interior deste politopo (combinação convexa de vértices), obedecendo à equação:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{A}_i,\tag{2.66}$$

onde $\alpha_i > 0$. Conforme (2.59), é possível multiplicar as equações (2.63), (2.64) e (2.65) por α_i . Sendo α_i números positivos as equações continuarão sendo negativas, ou seja:

$$\alpha_1 (\mathbf{P}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1'\mathbf{P}) < 0, \quad (2.67)$$

$$\alpha_2 (\mathbf{P}\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2'\mathbf{P}) < 0, \quad (2.68)$$

\vdots

$$\alpha_p (\mathbf{P}\mathbf{A}_p + \mathbf{A}_p'\mathbf{P}) < 0. \quad (2.69)$$

Somando as equações (2.67), (2.68) e (2.69), obtém-se:

$$\mathbf{P} \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{P} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{A}_i' \mathbf{P} < 0,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i (\mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i'\mathbf{P}) < 0. \quad (2.70)$$

Como $\alpha_i > 0$, concluí-se finalmente que:

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i'\mathbf{P} < 0.$$

O projeto de controladores depende da variável \mathbf{P} , que descreve a função de Lyapunov cuja existência garante a estabilidade do sistema linear [20].

Na seção 2.3 o problema de otimização a ser resolvido para obter um controlador do sistema, sem considerar as incertezas paramétricas, foi mostrado pela equação (2.36). No caso de sistemas com incertezas paramétricas e usando o conceito de estabilidade quadrática, a equação (2.36) pode ser escrita para cada um dos vértices da região politótica considerada. Neste caso, a equação (2.36) aplicada ao vértice i será chamada aqui de LMI(i).

O problema de otimização a ser resolvido considerando as incertezas paramétricas e o conceito da estabilidade quadrática passará a ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a:} \\ LMI_1 < \mathbf{0}, \\ LMI_2 < \mathbf{0}, \\ \vdots \\ LMI_i < \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (2.71)$$

que deverá encontrar como resultado um controlador que satisfaça todas as restrições acima, garantindo a estabilidade de cada vértice, e consequentemente, devido à estabilidade quadrática, estável para toda a região politópica. Se o controlador for projetado para o sistema correspondente a um vértice do politopo, ele seria otimizado para essa condição. Ao projetar o controlador que satisfaça todos os vértices do envelope convexo, tem-se um projeto que não é ótimo em nenhum vértice específico, ou seja, introduz-se um conservadorismo inevitável.

2.6 Solvers Utilizados

Neste trabalho, foram utilizadas funções do *Yalmip Toolbox* [20, 18] para a solução do problema de otimização. Este *Toolbox* é distribuído gratuitamente para a solução de problemas avançados de otimização. Permite ao usuário entrar os dados do problema e a solução dos problemas de modo intuitivo. Uma das principais características deste aplicativo é sua interface amigável e a possibilidade de uso de *solvers* externos para encontrar a solução de problemas de otimização. Atualmente o Yalmip trabalha com 20 *solvers* para diversos tipos de problemas. Neste trabalho utilizou-se o *solver SeDuMi* (*Self-Dual-Minimization package* [20, 28]), um software livre para otimização sobre cones simétricos.

As funções do *Yalmip toolbox* utilizadas na solução dos problemas de otimização foram:

- *sdpvar*, para definir variáveis de decisão;
- *set*, para definir as inequações e restrições dos problemas de otimização;

- *solvesdp*, para solucionar os problemas.

Um dos parâmetros utilizados neste trabalho é o *shift*, que possibilita alterar o critério de satisfação das restrições do problema de otimização de forma que estas não incluam o zero sempre que ocorra a violação das mesmas. Por exemplo: caso o critério de satisfação das restrições do problema seja 10^{-6} , a LMI será reescrita por:

$$LMI < 10^{-6}.$$

Os programas em *MATLAB* utilizados para solução dos problemas deste trabalho estão disponíveis no Anexo D.

Capítulo 3

Modelos Matemáticos de Suspensões e Controle H_∞

3.1 Principais Requisitos para Suspensões

O projeto de uma suspensão deve contemplar conforto e segurança para os passageiros. O conforto de um passageiro pode ser medido através da aceleração vertical do mesmo dentro do veículo. Já a segurança dos passageiros pode ser relacionada com o contato do pneu com o solo, e quanto maior for este contato, maior a segurança. Estes dois parâmetros podem ser levados em conta de forma conjunta, caracterizando um problema de otimização multi-objetivo.

Nas simulações deste trabalho, foram utilizados os seguintes modelos de suspensão:

- Modelo com dois graus de liberdade que consiste no modelo de duas massas (um quarto da massa do veículo e a massa de uma roda), considerando apenas o movimento vertical destas duas massas.
- Modelo com quatro graus de liberdade que considera metade da massa do veículo e duas rodas. Neste modelo, estuda-se também os movimentos verticais de cada roda e do veículo e o movimento angular *pitch* do veículo.
- Modelo com sete graus de liberdade que leva em consideração as quatro rodas do veículo e

sua massa total. Este modelo analisa sete possíveis movimentos: movimentos verticais das quatro rodas e do veículo, movimento angular *pitch* (θ) e movimento angular *yaw* (φ).

Estes modelos são apresentados respectivamente nas seções 3.2, 3.3 e 3.4.

3.2 Modelo com 2 graus de liberdade

O modelo para análise da suspensão com 2 graus de liberdade é apresentado pela Figura 3.1 [31]:

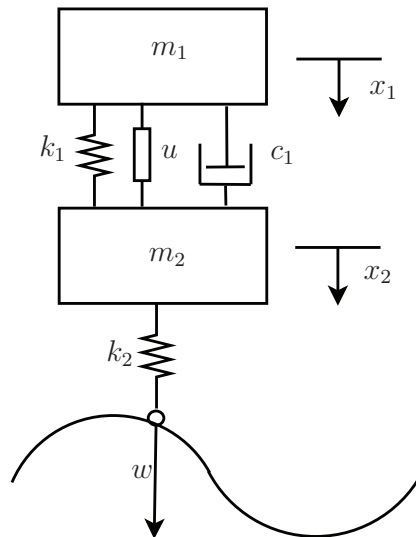


Figura 3.1: Esquema para ilustrar o modelo com 2 graus de liberdade simplificado

No modelo da Figura 3.1 tem-se que:

- k_1 é a rigidez da mola da suspensão;
- k_2 é a rigidez do pneu;
- c_1 é o amortecimento da suspensão;
- m_1 é um quarto da massa total do veículo;
- m_2 é a massa do pneu e da roda;

- w é a excitação que o solo causa na suspensão;
- x_1 é o movimento vertical do veículo;
- x_2 é o movimento vertical da roda;
- u é a força de controle do atuador da suspensão ativa que será instalado;

A Tabela 3.1 apresenta os valores adotados para os parâmetros deste modelo.

Tabela 3.1: Valores adotados nas simulações para o modelo de 2 graus de liberdade [35]

Parâmetro	Valor
25% da massa do veículo	$m_1 = 375kg$
Massa do pneu e roda	$m_2 = 59kg$
Coefficiente de amortecimento da suspensão	$c_1 = 1000N.s/m$
Rigidez da suspensão	$k_1 = 35000N/m$
Rigidez do pneu	$k_2 = 190000N/m$

Os valores apresentados na Tabela 3.1 foram baseados no estudo de Wang [35]. A equação de estados para este modelo, que foi deduzida no Anexo A, é apresentada a seguir.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{-c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{-k_1-k_2}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & \frac{-c_1}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ \frac{-1}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1} \underbrace{u}_{\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_2} \underbrace{w}_{\mathbf{w}}. \quad (3.1)$$

O desempenho da suspensão ativa, representado por z , conforme na equação (2.2), pode ser caracterizado por três aspectos: conforto dos passageiros, segurança e esforço de controle.

O conforto dos passageiros está diretamente relacionado com a aceleração vertical do veículo (massa m_1). Segundo a norma ISO 2631 [13], os seres humanos são mais sensíveis a excitações na faixa de 4 a 8 Hz. Portanto, o objetivo do controlador projetado será atuar com maior eficácia

nesta faixa. A aceleração de m_1 , como medida de desempenho, pode ser representada para fins de simulação pela equação (3.2):

$$z_1 = \ddot{x}_1 = \dot{x}_3 = \left(\frac{k_1}{m_1} \right) (x_2 - x_1) + \left(\frac{c_1}{m_1} \right) (x_4 - x_3) + \left(\frac{1}{m_1} \right) u. \quad (3.2)$$

A segurança é um aspecto relacionado à roda manter-se em contato com o solo, ou seja, pode ser medida através do deslocamento relativo entre a roda e a pista. Esta medida de desempenho pode ser representada pela equação (3.3):

$$z_2 = x_2 - w. \quad (3.3)$$

A suspensão ativa necessita da instalação de um atuador para seu funcionamento. Para considerar o uso de atuadores compatíveis, utilizou-se o esforço de controle como parâmetro de desempenho do problema de otimização, ou seja:

$$z_3 = u. \quad (3.4)$$

3.3 Modelo com 4 graus de liberdade

Como descrito anteriormente, o modelo com quatro graus de liberdade considera metade da massa do veículo e duas rodas. Além disso, este modelo estuda os movimentos verticais de cada roda e o movimento de *pitch* do veículo. A mola da suspensão dianteira possui rigidez k_{1f} , a mola da suspensão traseira possui rigidez k_{1t} , o amortecedor dianteiro possui constante de amortecimento c_{1f} e o amortecedor traseiro possui constante de amortecimento c_{1t} . Os pneus possuem uma rigidez k_2 . Metade da massa do veículo é representada por m_1 , e a massa do pneu dianteiro e do pneu traseiro são representadas por m_2 . As excitações w_f e w_t são provenientes da pista, respectivamente, nas suspensões dianteira e traseira. As forças u_f e u_t são provenientes dos atuadores da suspensão ativa instalados nas suspensões dianteira e traseira. A Figura 3.2 ilustra o modelo com 4 graus de liberdade simplificado.

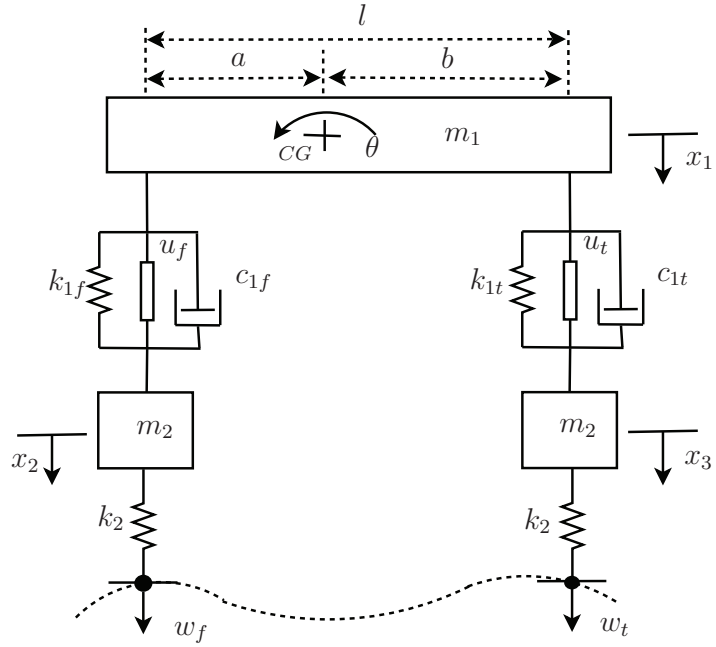


Figura 3.2: Esquema para ilustrar o modelo com 4 graus de liberdade simplificado

A Tabela 3.2 apresenta os valores adotados para os parâmetros deste modelo.

Da mesma forma que no modelo de 2 graus de liberdade, os valores apresentados na Tabela 3.2 foram baseados no estudo de Wang [35]. A equação de estados deste modelo, deduzida no Anexo A, é reapresentada na equação (3.5):

Tabela 3.2: Valores adotados para o modelo de 4 graus de liberdade [35]

Parâmetro	Valor
50% da massa total do veículo	$m_1 = 750kg$
Massa do pneu e roda	$m_2 = 59kg$
Momento de inércia de massa em θ	$I = 2160kgm^2$
Coeficiente de amortecimento da suspensão dianteira	$c_{1f} = 1000Ns/m$
Coeficiente de amortecimento da suspensão traseira	$c_{1t} = 1100Ns/m$
Rigidez da suspensão dianteira	$k_{1f} = 35000N/m$
Rigidez da suspensão traseira	$k_{1t} = 38000N/m$
Rigidez do pneu	$k_2 = 190000N/m$
Comprimento total do veículo	$l = 2,6m$
Distância da frente do veículo ao centro de massa	$a = 1,4m$
Distância da traseira do veículo ao centro de massa	$b = 1,7m$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_{1f}-k_{1t}}{m_1} & \frac{k_{1f}}{m_1} & \frac{k_{1t}}{m_1} & \frac{k_{1t}b-k_{1f}a}{m_1} & \frac{-c_{1f}-c_{1t}}{m_1} & \frac{c_{1f}}{m_1} & \frac{c_{1t}}{m_1} & \frac{c_{1t}b-c_{1f}a}{m_1} \\ \frac{k_{1f}}{m_2} & \frac{-k_{1f}-k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_{1f}a}{m_2} & \frac{c_{1f}}{m_2} & \frac{-c_{1f}}{m_2} & 0 & \frac{c_{1f}a}{m_2} \\ \frac{k_{1t}}{m_2} & 0 & \frac{-k_{1t}-k_2}{m_2} & \frac{k_{1t}b}{m_2} & \frac{c_{1t}}{m_2} & 0 & \frac{-c_{1t}}{m_2} & \frac{c_{1t}b}{m_2} \\ \frac{k_{1t}b-k_{1f}a}{I} & \frac{k_{1f}a}{I} & \frac{-k_{1t}b}{I} & \frac{-k_{1t}b^2-k_{1f}a^2}{I} & \frac{c_{1t}b-c_{1f}a}{I} & \frac{c_{1f}a}{I} & \frac{-c_{1t}b}{I} & \frac{-c_{1t}b^2-c_{1f}a^2}{I} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{Bmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_1} \\ \frac{-1}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{m_2} \\ \frac{-a}{I} & \frac{b}{I} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{B}_1]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_f \\ u_t \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{u}\}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{B}_2]} \underbrace{\begin{Bmatrix} w_f \\ w_t \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{w}\}},$$

(3.5)

onde:

- u_f e u_t são os esforços de controle que os atuadores fazem no veículo e nas rodas dianteiras e traseiras;
- w_f e w_t são os deslocamentos causados nas rodas dianteira e traseira devido a distúrbios externos (pista);
- x_1 corresponde ao deslocamento vertical do veículo;
- x_2 corresponde ao deslocamento vertical da roda dianteira;
- x_3 corresponde ao deslocamento vertical da roda traseira;
- x_4 corresponde ao deslocamento angular *pitch* do veículo, ou seja θ ;
- x_5 corresponde à velocidade vertical do veículo, ou seja \dot{x}_1 ;
- x_6 corresponde à velocidade vertical da roda dianteira, ou seja \dot{x}_2 ;
- x_7 corresponde à velocidade vertical da roda traseira, ou seja \dot{x}_3 ;
- x_8 corresponde à velocidade angular do veículo, ou seja $\dot{\theta}$.

O desempenho da suspensão, representado por z na formulação deste trabalho, conforme a equação (2.2), é caracterizado por quatro aspectos neste trabalho: conforto dos passageiros, segurança (ou dirigibilidade), esforço de controle no atuador dianteiro e esforço de controle no atuador traseiro.

O conforto dos passageiros pode ser relacionado com a aceleração vertical do veículo (massa m_1). Da mesma forma que foi definido na seção 3.2, é desejado reduzir a aceleração vertical do veículo entre as frequências de 4 a 8 Hz. Para o modelo de 4 graus de liberdade, a aceleração vertical do veículo na simulação pode ser representada pela equação (3.6), caracterizando o primeiro parâmetro do problema de controle:

$$z_1 = \ddot{x}_1 = \dot{x}_5 = -\frac{(k_{1f}+k_{1t})}{m_1}x_1 + \frac{(k_{1f})}{m_1}x_2 + \frac{(k_{1t})}{m_1}x_3 + \frac{(k_{1t}b-k_{1f}a)}{m_1}x_4 - \frac{(c_{1f}+c_{1t})}{m_1}x_5 +$$

$$+ \frac{c_{1f}}{m_1} x_6 + \frac{c_{1t}}{m_1} x_7 + \frac{(c_{1t}b - c_{1f}a)}{m_1} x_8 + \frac{u_f}{m_1} + \frac{u_t}{m_1}. \quad (3.6)$$

Além da aceleração vertical do veículo, o modelo de 4 graus de liberdade também estará sob ação da aceleração angular, apresentada na equação (3.7).

$$z_2 = \ddot{\theta} = \dot{x}_8 = \frac{(c_{1b} - c_{1a})}{I} (x_5) + \frac{(c_{1a})}{I} (x_6) - \frac{(c_{1b})}{I} (x_7) - \frac{(c_{1b}^2 + c_{1a}^2)}{I} (x_8) +$$

$$+ \frac{(k_{1b} - k_{1a})}{I} (x_1) + \frac{(k_{1a})}{I} (x_2) - \frac{(k_{1b})}{I} (x_3) - \frac{(k_{1b}^2 + k_{1a}^2)}{I} (x_4) - \frac{au_f}{I} + \frac{bu_t}{I}. \quad (3.7)$$

Uma forma de aumentar a segurança dos passageiros é evitar que as rodas percam contato com o solo. Um artifício matemático para avaliar a perda de contato dos pneus com a pista é encontrar o momento necessário para que as rodas percam este contato (M_{ext}). A Figura 3.3 ilustra as forças atuantes no modelo para representar este momento.

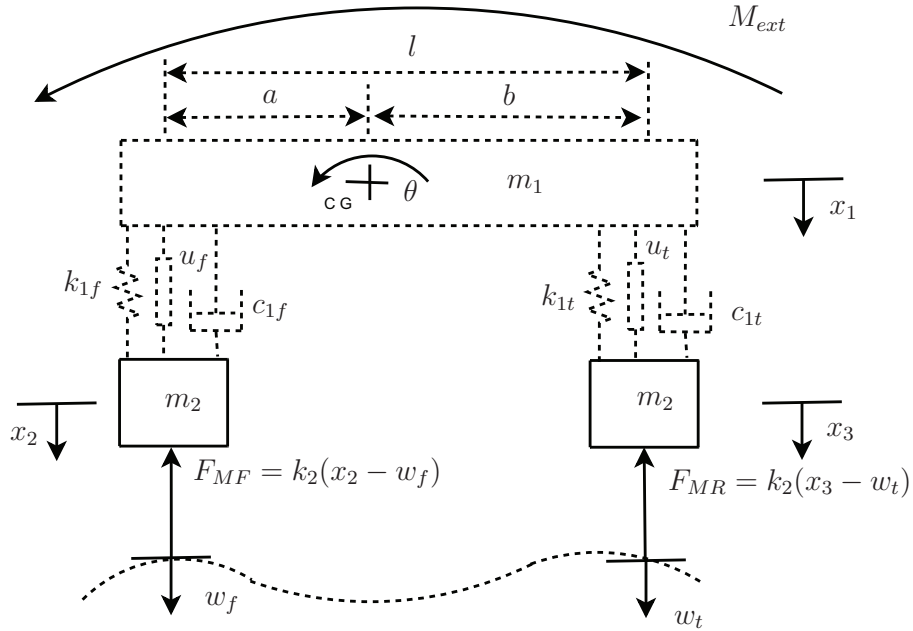


Figura 3.3: Esquema para representar o momento gerado pelas irregularidades da pista

Da Figura 3.3, F_{MF} representa a força na roda dianteira e F_{MR} representa a força na roda traseira. O momento em torno do CG gerado por estas forças é dado pela equação (3.8):

$$M_{ext} = k_2 b(x_3 - w_t) - k_2 a(x_2 - w_f). \quad (3.8)$$

Ao equilibrar o momento M_{ext} , ou seja $M_{ext} = 0$, será possível maximizar o contato das rodas do veículo com a pista. Logo, um parâmetro de desempenho neste problema deve ser aproximar o valor de M_{ext} de 0. Simplificando a equação (3.8), pode-se escrever o desempenho do sistema da seguinte forma:

$$z_3 = b(x_3 - w_t) - a(x_2 - w_f). \quad (3.9)$$

Da mesma forma que na seção 3.2, utilizou-se também os esforços de controle como parâmetros de desempenho do problema de controle conforme apresentado nas equações (3.10) e (3.11).

$$z_4 = u_f; \quad (3.10)$$

$$z_5 = u_t. \quad (3.11)$$

3.4 Modelo com 7 graus de liberdade

Conforme descrito anteriormente, o modelo de 7 graus de liberdade leva em consideração as quatro rodas do veículo e sua massa total, considerando sete possíveis movimentos: movimento vertical do veículo, movimentos verticais das rodas, movimento de *pitch* θ e movimento de *yaw* φ . As molas da suspensão dianteira possuem rigidez k_{1f} e da suspensão traseira possuem rigidez k_{1t} , os amortecedores dianteiros possuem uma constante de amortecimento c_{1f} e os amortecedores traseiros possuem uma constante de amortecimento c_{1t} . Os pneus possuem uma rigidez k_2 . A massa do veículo é representada por m_1 , e a massa dos pneus do veículo são representadas por m_2 . As excitações provenientes do solo nas rodas traseira esquerda, dianteira esquerda, dianteira direita e traseira direita são, respectivamente, w_{te} , w_{fe} , w_{fd} e w_{td} . Os esforços de controle dos atuadores traseiro esquerdo, dianteiro esquerdo, dianteiro direito e traseiro direito são, respectivamente, u_{te} , u_{fe} , u_{fd} e u_{td} . A Figura 3.5 ilustra o modelo de 7 graus de liberdade.

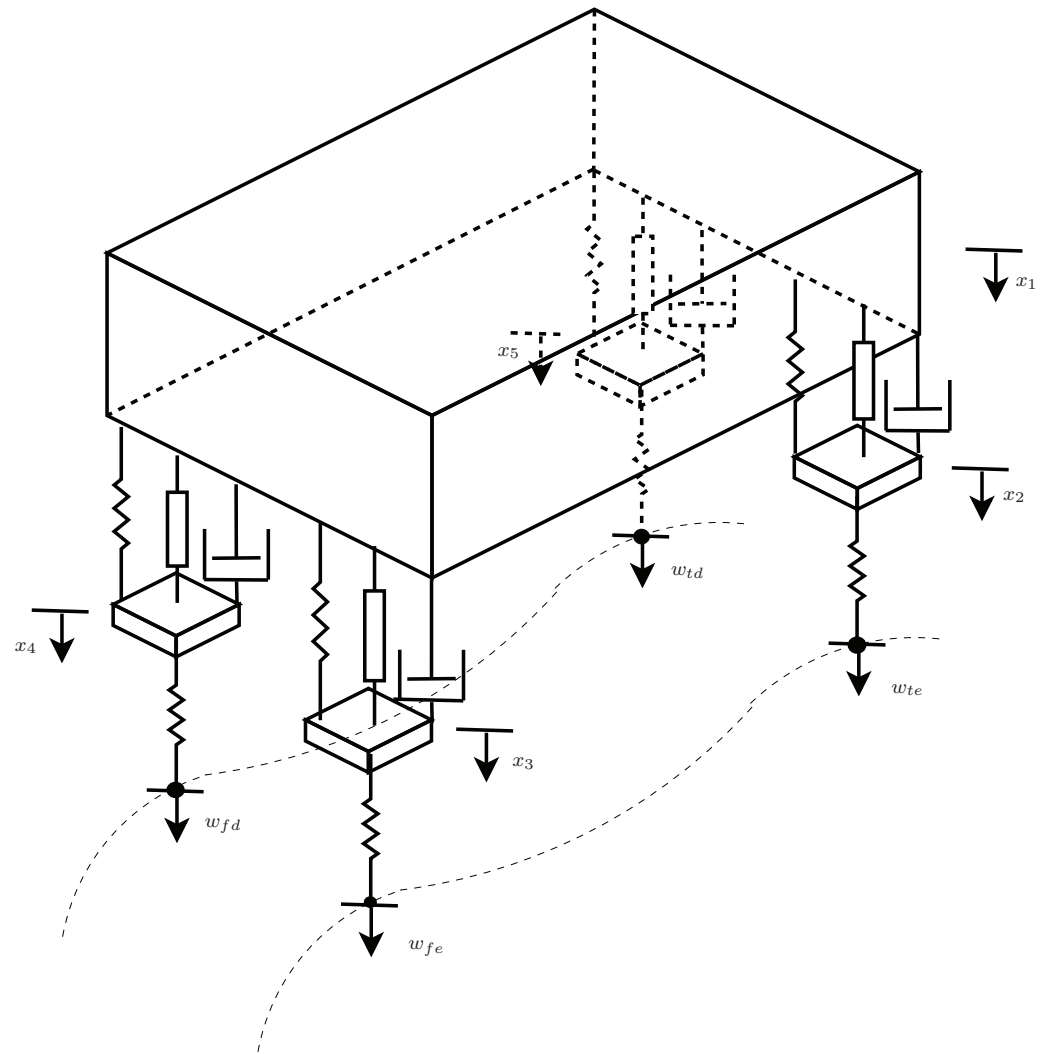


Figura 3.4: Esquema para ilustrar o modelo com 7 graus de liberdade simplificado

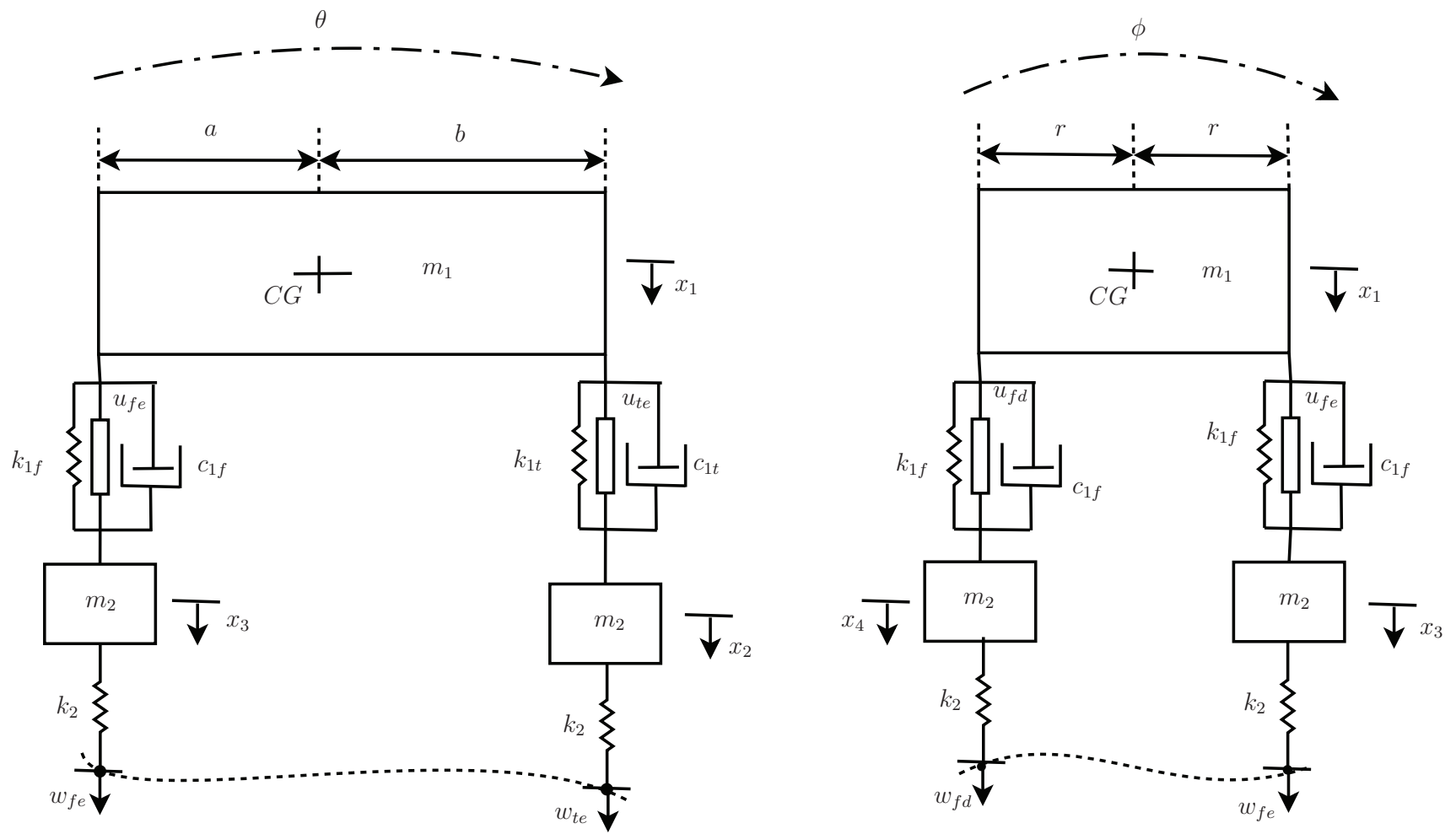


Figura 3.5: Vistas lateral e frontal da ilustração do modelo com 7 graus de liberdade

A Tabela 3.3 apresenta os valores adotados para os parâmetros deste modelo.

Tabela 3.3: Valores adotados nas simulações para o modelo de 7 graus de liberdade [35]

Parâmetro	Valor
Massa total do veículo	$m_1 = 1500kg$
Massa do pneu e roda	$m_2 = 59kg$
Momento de inércia de massa em θ	$I = 2160kgm^2$
Momento de inércia de massa em φ	$J = 460kgm^2$
Coeficiente de amortecimento da suspensão dianteira	$c_{1f} = 1100N.s/m$
Coeficiente de amortecimento da suspensão traseira	$c_{1t} = 1000N.s/m$
Rigidez da suspensão dianteira	$k_{1f} = 35000N/m$
Rigidez da suspensão traseira	$k_{1t} = 38000N/m$
Rigidez do pneu	$k_2 = 190000N/m$
Distância da frente do veículo ao centro de massa	$a = 1,4m$
Distância da traseira do veículo ao centro de massa	$b = 1,7m$
Distância da lateral do veículo ao centro de massa	$r = 0,45m$

Os valores apresentados na Tabela 3.3 foram baseados no estudo do Wang [35]. A equação de estados para este modelo, que foi deduzida no Anexo A, é representada a seguir na equação (3.12).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad (3.12)$$

onde:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \left\{ \begin{matrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dot{x}_4 & \dot{x}_5 & \dot{x}_6 & \dot{x}_7 & \dot{x}_8 & \dot{x}_9 & \dot{x}_{10} & \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dot{x}_{13} & \dot{x}_{14} \end{matrix} \right\};$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{matrix} \mathbf{A}_{R1} & \mathbf{A}_{R2} \end{matrix} \right];$$

$$\mathbf{A}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2k_{1f}-2k_{1t}}{m_1} & \frac{k_{1t}}{m_1} & \frac{k_{1f}}{m_1} & \frac{k_{1f}}{m_1} & \frac{k_{1t}}{m_1} & \frac{-2k_{1f}a+2k_{1t}b}{m_1} & 0 \\ \frac{k_{1t}}{m_2} & \frac{-k_{1t}-k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-k_{1t}b}{m_2} & \frac{k_{1t}r}{m_2} \\ \frac{k_{1f}}{m_2} & 0 & \frac{-k_{1f}-k_2}{m_2} & 0 & 0 & \frac{k_{1f}a}{m_2} & \frac{k_{1f}r}{m_2} \\ \frac{k_{1f}}{m_2} & 0 & 0 & \frac{-k_{1f}-k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_{1f}a}{m_2} & \frac{-k_{1f}r}{m_2} \\ \frac{k_{1t}}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-k_{1t}-k_2}{m_2} & \frac{-k_{1t}b}{m_2} & \frac{-k_{1t}r}{m_2} \\ \frac{-2k_{1f}a+2k_{1t}b}{I} & \frac{-k_{1t}b}{I} & \frac{k_{1f}a}{I} & \frac{k_{1f}a}{I} & \frac{-k_{1t}b}{I} & \frac{-2k_{1f}a^2-2k_{1t}b^2}{I} & 0 \\ 0 & \frac{k_{1t}r}{J} & \frac{k_{1f}r}{J} & \frac{-k_{1f}r}{J} & \frac{-k_{1t}r}{J} & 0 & \frac{2k_{1f}r^2+2k_{1t}r^2}{J} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2c_{1f}-2c_{1t}}{m_1} & \frac{c_{1t}}{m_1} & \frac{c_{1f}}{m_1} & \frac{c_{1f}}{m_1} & \frac{c_{1t}}{m_1} & \frac{-2c_{1f}a+2c_{1t}b}{m_1} & 0 \\ \frac{c_{1t}}{m_2} & \frac{-c_{1t}-c_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-c_{1t}b}{m_2} & \frac{c_{1t}r}{m_2} \\ \frac{c_{1f}}{m_2} & 0 & \frac{-c_{1f}-c_2}{m_2} & 0 & 0 & \frac{c_{1f}a}{m_2} & \frac{c_{1f}r}{m_2} \\ \frac{c_{1f}}{m_2} & 0 & 0 & \frac{-c_{1f}-c_2}{m_2} & 0 & \frac{c_{1f}a}{m_2} & \frac{-c_{1f}r}{m_2} \\ \frac{c_{1t}}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-c_{1t}-c_2}{m_2} & \frac{-c_{1t}b}{m_2} & \frac{-c_{1t}r}{m_2} \\ \frac{-2c_{1f}a+2c_{1t}b}{I} & \frac{-c_{1t}b}{I} & \frac{c_{1f}a}{I} & \frac{c_{1f}a}{I} & \frac{-c_{1t}b}{I} & \frac{-2c_{1f}a^2-2c_{1t}b^2}{I} & 0 \\ 0 & \frac{c_{1t}r}{J} & \frac{c_{1f}r}{J} & \frac{-c_{1f}r}{J} & \frac{-c_{1t}r}{J} & 0 & \frac{2c_{1f}r^2+2c_{1t}r^2}{J} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}' = \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \end{matrix} \right\};$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{m_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{m_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m_5} \\ \frac{b}{I} & \frac{-a}{I} & \frac{-a}{I} & \frac{b}{I} \\ \frac{r}{J} & \frac{r}{J} & \frac{-r}{J} & \frac{-r}{J} \end{bmatrix}; \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{te} \\ u_{fe} \\ u_{fd} \\ u_{td} \end{bmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_2}{m_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{te} \\ w_{fe} \\ w_{fd} \\ w_{td} \end{bmatrix},$$

onde:

- x_1 corresponde ao deslocamento vertical do veículo;
- x_2 corresponde ao deslocamento vertical da roda traseira esquerda;
- x_3 corresponde ao deslocamento vertical da roda dianteira esquerda;
- x_4 corresponde ao deslocamento vertical da roda dianteira direita;
- x_5 corresponde ao deslocamento vertical da roda traseira esquerda;
- x_6 corresponde ao deslocamento angular de *pitch* do veículo, ou seja θ ;
- x_7 corresponde ao deslocamento angular de *yaw* do veículo, ou seja φ ;
- x_8 corresponde à velocidade vertical do veículo, ou seja \dot{x}_1 ;
- x_9 corresponde à velocidade vertical da roda traseira esquerda, ou seja \dot{x}_2 ;
- x_{10} corresponde à velocidade vertical da roda dianteira esquerda, ou seja \dot{x}_3 ;
- x_{11} corresponde à velocidade vertical da roda dianteira direita, ou seja \dot{x}_4 ;

- x_{12} corresponde à velocidade vertical da roda traseira esquerda, ou seja \dot{x}_5 ;
- x_{13} corresponde à velocidade angular do veículo, ou seja $\dot{\theta}$;
- x_{14} corresponde à velocidade angular do veículo, ou seja $\dot{\varphi}$;

O desempenho da suspensão, representado por z_i na formulação deste trabalho, conforme a equação (2.2), é caracterizado pelos seguintes aspectos: conforto dos passageiros, segurança e os esforços de controle nas quatro rodas do veículo.

O conforto dos passageiros pode ser relacionado com a aceleração vertical do veículo (massa m_1). Da mesma forma que foi definido nas seções 3.2 e 3.3, é desejado reduzir a aceleração vertical do veículo entre as frequências de 4 a 8 Hz. Para o modelo de 7 graus de liberdade, a aceleração vertical do veículo na simulação pode ser representada pela equação (3.13):

$$\begin{aligned}
z_1 = \ddot{x}_1 = \dot{x}_8 = & \left(\frac{k_{1f}}{m_1} \right) (x_4 + x_3 - 2x_1) + \left(\frac{k_{1t}}{m_1} \right) (x_2 + x_5 - 2x_1) - \left(\frac{2k_{1f}a - 2k_{1t}b}{m_1} \right) x_6 + \\
& + \left(\frac{c_{1f}}{m_1} \right) (x_{11} + x_{10} - 2x_8) + \left(\frac{c_{1t}}{m_1} \right) (x_9 + x_{12} - 2x_8) - \left(\frac{2c_{1f}a - 2c_{1t}b}{m_1} \right) x_{13} + \\
& + \left(\frac{1}{m_1} \right) (u_{td} + u_{te} + u_{fe} + u_{fd}), \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Além da aceleração vertical do veículo, o modelo de 7 graus de liberdade também estará sob ação de duas acelerações angulares, representada pelas equações (3.14) e (3.15):

$$\begin{aligned}
z_2 = \ddot{\theta} = \dot{x}_{13} = & - \left(\frac{2c_{1a} - 2c_{1b}}{I} \right) x_8 - \frac{c_{1b}}{I} x_9 + \frac{c_{1a}}{I} x_{10} + \frac{c_{1a}}{I} x_{11} - \frac{c_{1b}}{I} x_{12} - \left(\frac{2c_{1b}^2 + 2c_{1a}^2}{I} \right) x_{13} - \left(\frac{2k_{1a} - 2k_{1b}}{I} \right) x_1 + \\
& - \frac{k_{1b}}{I} x_2 + \frac{k_{1a}}{I} x_3 + \frac{k_{1a}}{I} x_4 - \frac{k_{1b}}{I} x_5 - \left(\frac{2k_{1b}^2 + 2k_{1a}^2}{I} \right) x_6 + \frac{(u_{te}b - u_{fe}a - u_{fd}a + u_{td}b)}{I}, \tag{3.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_3 = \ddot{\varphi} = \dot{x}_{14} = & \left(\frac{c_{1r}}{J} \right) (x_9 + x_{10} - x_{11} - x_{12}) - \frac{4c_{1r}^2}{J} x_{14} + \left(\frac{k_{1r}}{J} \right) (x_2 + x_3 - x_4 - x_5) \\
& - \frac{4k_{1r}^2}{J} x_7 + \frac{(u_{te}r + u_{fe}r - u_{fd}r - u_{td}r)}{J}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Uma forma de aumentar a segurança dos passageiros é garantir que as rodas não percam contato com o solo. Da mesma forma que o modelo de modelo de 4 graus de liberdade, utiliza-se

um artifício matemático para avaliar o contato dos pneus com a pista através dos momentos (M_θ e M_φ). A Figura 3.6 ilustra as forças atuantes nas vistas lateral e frontal do modelo de 7 graus de liberdade.

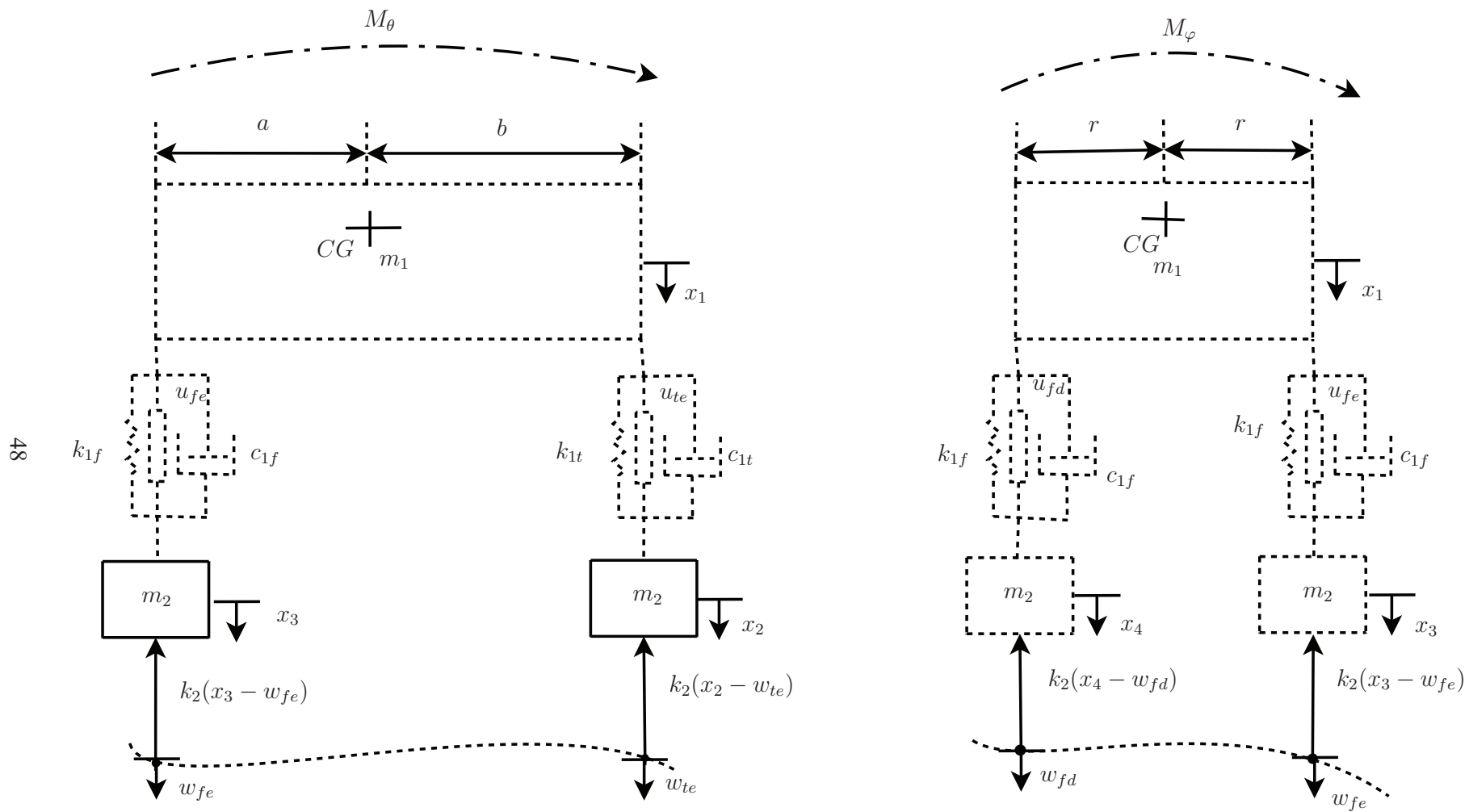


Figura 3.6: Vistas do modelo de 7 graus de liberdade para ilustrar o momento gerado pelas irregularidades da pista

O momento M_θ , pode ser calculado pela equação (3.16):

$$M_\theta = k_2 a [(x_3 - w_{fe}) + (x_4 - w_{fd})] - k_2 b [(x_2 - w_{te}) + (x_5 - w_{td})]. \quad (3.16)$$

Da mesma forma que o momento M_θ , o momento M_φ , pode ser pela equação (3.17):

$$M_\varphi = k_2 r [(x_3 - w_{fe}) + (x_2 - w_{te})] - k_2 r [(x_4 - w_{fd}) + (x_5 - w_{td})]. \quad (3.17)$$

Ao equilibrar os momentos M_θ e M_φ é possível maximizar o contato das rodas do veículo com a pista. Logo, uma medida de desempenho a ser utilizada, visando obter um desempenho adequado para assegurar o contato com a pista, é anular a soma destes momentos, ou seja:

$$z_4 = M_\theta + M_\varphi. \quad (3.18)$$

Simplificando a equação (3.18), é possível escrever o desempenho z_3 do problema de controle como mostra a equação (3.19):

$$\begin{aligned} z_4 = & (a) (x_3 - w_{fe}) + (a) (x_4 - w_{fd}) + (-b) (x_2 - w_{te}) + (-b) (x_5 - w_{td}) + \\ & + (r) (x_3 - w_{fe}) + (-r) (x_4 - w_{fd}) + (r) (x_2 - w_{te}) + (-r) (x_5 - w_{td}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da mesma forma que nas seções 3.2 e 3.3, utilizou-se os esforços de controle como parâmetros de desempenho. Os esforços que os atuadores irão realizar nas rodas traseira esquerda, dianteira esquerda, dianteira direita e traseira direita são, respectivamente, mostrados como parâmetros de desempenho nas equações (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23).

$$z_5 = u_{te}, \quad (3.20)$$

$$z_6 = u_{fe}, \quad (3.21)$$

$$z_7 = u_{fd}, \quad (3.22)$$

$$z_8 = u_{td}. \quad (3.23)$$

3.5 Funções de ponderação utilizadas para a obtenção da planta generalizada

Conforme explicação na seção 2.4, a função de ponderação é uma função de transferência que apresenta um comportamento típico em função da frequência.

O objetivo das funções de ponderação é privilegiar as medidas de desempenho, ponderando os sinais de entrada (u) e de saída (z_i) do sistema na fase de projeto do controlador. Neste trabalho, os desempenhos ponderados foram: a aceleração vertical do veículo, deslocamento relativo das rodas em relação ao solo e esforço de controle.

Sabendo, por exemplo, que um dado distúrbio exógeno afeta com maior intensidade a saída de desempenho na baixa frequência, pode-se incluir na fase de projeto do controlador uma ponderação (ou peso) que provoque uma atenuação da resposta a este distúrbio nesta faixa de frequência.

A Figura 3.7 representa o exemplo de uma planta aumentada do sistema com as funções de ponderação. Neste exemplo, foram usados 3 desempenhos:

- Deslocamento relativo da roda, conforme as equações (3.3), (3.9) e (3.19);
- Acelerações do veículo;
- Esforço de controle.

Definiu-se como sinal de realimentação a aceleração vertical do veículo.

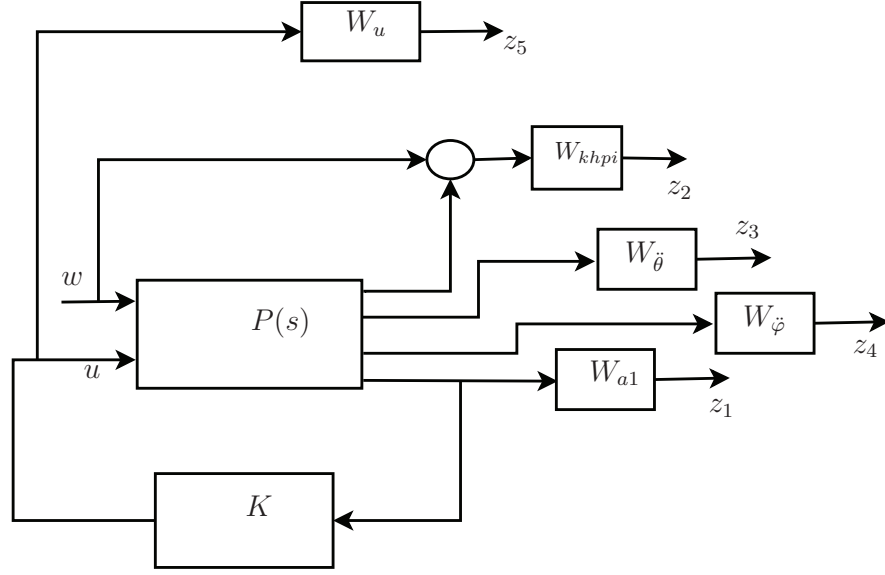


Figura 3.7: Exemplo das funções de ponderação aplicadas no modelo de 2 graus de liberdade

Na Figura 3.7 tem-se:

- W_u é a função que pondera o sinal de controle;
- W_{a1} é a função que pondera o desempenho relacionado à aceleração vertical do veículo;
- $W_{\dot{\theta}}$ é a função que pondera o desempenho relacionado à aceleração angular em θ do veículo;
- $W_{\dot{\varphi}}$ é a função que pondera o desempenho relacionado à aceleração angular em φ do veículo;
- $W_{k h p i}$ é a função que pondera o desempenho relacionado ao deslocamento relativo da roda;

As funções de ponderação usadas neste trabalho foram baseadas nas funções utilizadas no artigo do Wang [35], que projetou um controlador utilizando o conceito de funções de ponderação no modelo de 7 graus de liberdade. Com este controlador, Wang obteve bons resultados em sua simulação, que indicou uma melhora na segurança e no conforto dos passageiros.

Outros parâmetros para as funções de ponderação também foram testados para obtenção de um controlador, no entanto os mesmos levaram a resultados menos adequados que os obtidos com as funções apresentadas neste trabalho.

A função de ponderação $W_{k h p i}$, que foi aplicada para obter uma redução na resposta do deslocamento relativo da roda, pondera com maior intensidade a baixa frequência e com menor

intensidade a alta freqüência (função de ponderação do tipo passa-baixa). Espera-se que o maior pico da resposta em freqüência do parâmetro relacionado com os deslocamentos relativos das rodas seja reduzido. Essa função de ponderação é mostrada pela equação (3.24). O formato dessa função de ponderação é ilustrado pela Figura 3.8.

$$W_{khp} = \frac{s + 50}{s + 1}. \quad (3.24)$$

Já as funções W_{a1} , $W_{\ddot{\theta}}$ e $W_{\ddot{\varphi}}$ ponderam com maior intensidade a faixa de freqüência recomendada de 4 a 8 Hz, que é a freqüência que os seres humanos possuem maior sensibilidade (norma ISO 2631 [13]), podendo gerar desconforto nos passageiros. Conforme se afasta desta faixa a ponderação é diminuída. Com isso, espera-se que a resposta das acelerações vertical e angulares do veículo sejam reduzidas nesta faixa de freqüência. Essas funções de ponderação são mostradas pelas equações (3.25) e (3.26). O formato dessas funções de ponderação são ilustrados pela Figura 3.8.

$$W_{a1} = \frac{s^2 + 314,2s + 987}{s^2 + 43,98s + 987}, \quad (3.25)$$

$$W_{\ddot{\theta}} = W_{\ddot{\varphi}} = \frac{s^2 + 50,27s + 25,27}{s^2 + 7,037s + 25,27}. \quad (3.26)$$

Diferentemente do deslocamento relativo das rodas e da aceleração vertical do veículo, deseja-se que o esforço de controle tenha uma boa atuação em toda a faixa de freqüência, de forma que sua ponderação seja uma constante. Portanto, Wang [35] optou por uma função de ponderação de ordem zero, como mostrada pela equação (3.27). O formato dessa função de ponderação é ilustrada pela Figura 3.8.

$$W_u = 0,001, \quad (3.27)$$

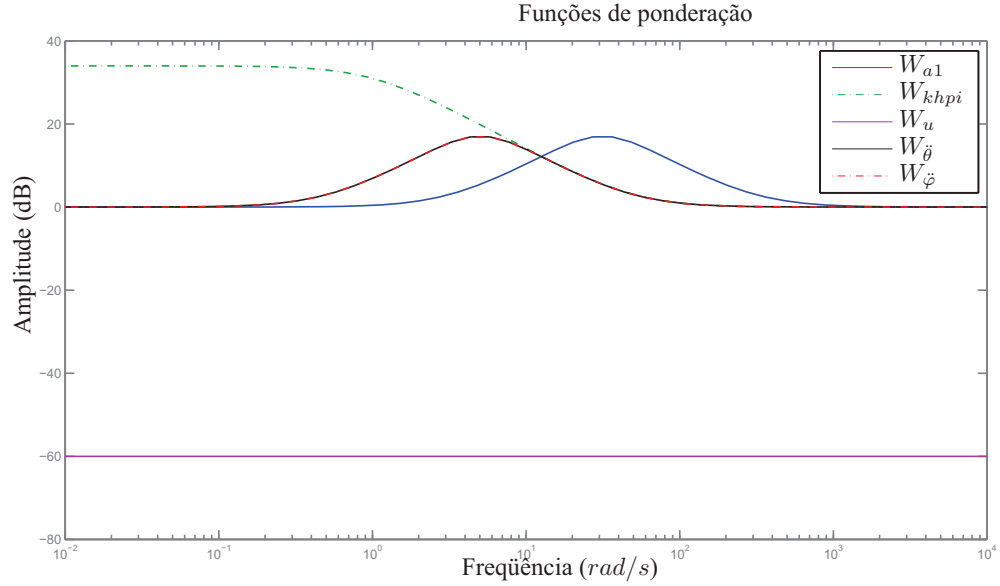


Figura 3.8: Funções de ponderação que serão aplicadas nos modelos

Na Figura 3.8 W_i são as funções de ponderações citadas acima e aplicadas nos modelos.

3.6 Incertezas paramétricas nos modelos

No veículo alguns valores podem sofrer variações devido à ocupação, desgaste de componentes e outros aspectos. O projeto de um controlador robusto deve prever essas variações. Uma forma para levar as incertezas em conta no projeto de controladores é considerar o conceito de estabilidade quadrática e a variação de modelos no interior um politopo gerado a partir das situações de parâmetros com incertezas, conforme descrito na seção 2.5.

Os principais parâmetros considerados incertos nos modelos das suspensões considerados neste trabalho são:

- Massa do veículo. O veículo pode estar ou não com a capacidade máxima de passageiros e bagagens. Assim, adota-se neste trabalho uma variação de -15% até $+15\%$ do valor nominal;
- Rigidez do pneu, pois o mesmo pode estar fora da pressão de calibração nominal. No estudo, será adotada uma variação de -15% até $+15\%$ em torno do valor nominal;
- Amortecedor da suspensão, podendo o mesmo sofrer alteração devido ao desgaste e às variações de temperatura. No estudo, será adotada uma variação de -15% até $+15\%$ do valor nominal.

Considerando as combinações destes parâmetros, existem oito pontos extremos conforme apresentado nas Tabelas 3.4, 3.5 e 3.6 para os modelos de 2, 4 e 7 graus de liberdade.

Tabela 3.4: Pontos extremos em função da variação dos parâmetros incertos para o modelo de dois graus de liberdade

Extremos	Massa do veículo (m_1)	Amortecimento (c_1)	Rigidez (k_2)
Extremo 1	431,25 kg	1150 Ns/m	218500 N/m
Extremo 2	318,75 kg	1150 Ns/m	218500 N/m
Extremo 3	431,25 kg	850 Ns/m	218500 N/m
Extremo 4	318,75 kg	850 Ns/m	218500 N/m
Extremo 5	431,25 kg	1150 Ns/m	161500 N/m
Extremo 6	318,75 kg	1150 Ns/m	161500 N/m
Extremo 7	431,25 kg	850 Ns/m	161500 N/m
Extremo 8	318,75 kg	850 Ns/m	161500 N/m
Nominal	375 kg	1000 Ns/m	190000 N/m

Do problema de otimização citado na seção 2.5, cada extremo do polítopo gera uma nova inequação matricial linear além da inequação (2.30), pois os valores das matrizes de estados variam com os valores de m_1 , c_{1f} , c_{1t} e k_2 . Logo, há a necessidade de resolver um problema de otimização com oito inequações além da inequação (2.36), encontrando como resultado um controlador que busque estabilidade no interior do polítopo para cada modelo de suspensão citado. As matrizes do controlador respeitarão as equações (2.38), (2.39), (2.38), (2.45), (2.46) e (2.47). Neste trabalho, as matrizes A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , D_{11} , D_{12} , D_{21} e D_{22} destas equações serão as matrizes com os valores nominais de cada sistema.

Tabela 3.5: Pontos extremos em função da variação dos parâmetros incertos para o modelo de quatro graus de liberdade

Extremos	Massa do veículo (m_1)	Amortecimento (c_{1f})	Amortecimento (c_{1t})	Rigidez (k_2)
Extremo 1	862,5 kg	1150 Ns/m	1265 Ns/m	218500 N/m
Extremo 2	637,5 kg	1150 Ns/m	1265 Ns/m	218500 N/m
Extremo 3	862,5 kg	850 Ns/m	935 Ns/m	218500 N/m
Extremo 4	637,5 kg	850 Ns/m	935 Ns/m	218500 N/m
Extremo 5	862,5 kg	1150 Ns/m	1265 Ns/m	161500 N/m
Extremo 6	637,5 kg	1150 Ns/m	1265 Ns/m	161500 N/m
Extremo 7	862,5 kg	850 Ns/m	935 Ns/m	161500 N/m
Extremo 8	637,5 kg	850 Ns/m	935 Ns/m	161500 N/m
Nominal	750 kg	1000 Ns/m	1100 Ns/m	190000 N/m

Tabela 3.6: Pontos extremos em função da variação dos parâmetros incertos para o modelo de sete graus de liberdade

Extremos	Massa do veículo (m_1)	Amortecimento (c_{1f})	Amortecimento (c_{1t})	Rigidez (k_2)
Extremo 1	1725 kg	1150 Ns/m	1265 Ns/m	218500 N/m
Extremo 2	1275 kg	1150 Ns/m	1265 Ns/m	218500 N/m
Extremo 3	1725 kg	850 Ns/m	935 Ns/m	218500 N/m
Extremo 4	1275 kg	850 Ns/m	935 Ns/m	218500 N/m
Extremo 5	1725 kg	1150 Ns/m	1265 Ns/m	161500 N/m
Extremo 6	1275 kg	1150 Ns/m	1265 Ns/m	161500 N/m
Extremo 7	1725 kg	850 Ns/m	935 Ns/m	161500 N/m
Extremo 8	1275 kg	850 Ns/m	935 Ns/m	161500 N/m
Nominal	1500 kg	1000 Ns/m	1100 Ns/m	190000 N/m

Capítulo 4

Resultados obtidos

Neste capítulo, serão apresentados os resultados de simulações realizadas com o programa *MATLAB 7.4* utilizando o controlador H_∞ projetado considerando funções de ponderação da seção 3.5 e incertezas paramétricas da seção 3.6 tratadas aqui de acordo com o conceito de estabilidade quadrática (seção 2.5). Além disso, serão avaliadas as oito respostas dos oito extremos e as respostas dos sistemas com valores nominais utilizando o controlador projetado.

Para as simulações deste trabalho, foram adotados os valores mostrados no Capítulo 4, nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3. O objetivo é reduzir a resposta entre as frequências de 4 a 8 Hz da aceleração vertical do veículo (faixa de frequência que os seres humanos possuem maior sensibilidade, podendo gerar o desconforto) e reduzir a resposta em frequência do deslocamento relativo das rodas. Além disso o sinal de controle é verificado.

Outra simulação possível é verificar o comportamento do sistema quando sujeito a um distúrbio externo. Neste estudo, foi definido um obstáculo como distúrbio, cujas medidas são 0,1 m de altura e 0,5 m de comprimento. O perfil do obstáculo é ilustrado pela Figura 4.1, e é representado por uma elipse cuja equação é:

$$y = 0,1\sqrt{1 - \frac{x^2}{0,25^2}}. \quad (4.1)$$

Este perfil foi escolhido devido à sua proximidade ao formato de uma lombada.

Foi adotada a velocidade do veículo de 40 km/h ao passar pelo obstáculo. Nesta situação, serão ilustrados os parâmetros associados à segurança e ao conforto dos passageiros, além do esforço necessário para controle. Para ilustrar o efeito do controlador, serão calculadas as reduções

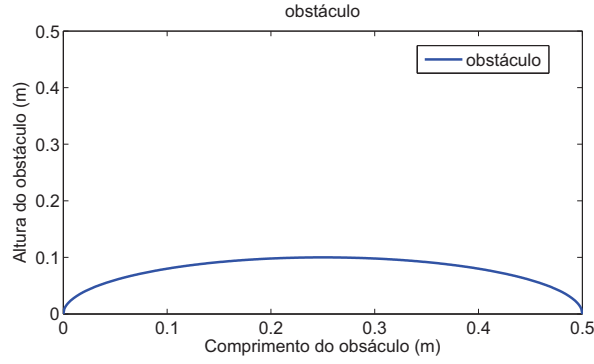


Figura 4.1: Obstáculo

do tempo de estabilização e do maior valor dos picos das respostas temporais.

O tempo de estabilização de um sistema é o tempo necessário para que sua resposta temporal possua um valor de amplitude dentro de uma faixa de tolerância de $x\%$ em relação ao valor da amplitude de estabilização. Neste trabalho foi usado o tempo de estabilização a 5%. A comparação entre os tempos de estabilização dos sistemas com controle e sem controle é mostrada pela equação (4.2):

$$\Delta_t = \frac{t_{sc} - t_{cc}}{t_{sc}} \times 100, \quad (4.2)$$

onde:

- Δ_t é a diferença percentual dos tempos de estabilização dos sistemas com controle e sem controle;
- t_{cc} é o tempo de estabilização do sistema com controle;
- t_{sc} é o tempo de estabilização do sistema sem controle.

O maior valor do pico é a máxima amplitude que o sistema atinge na resposta temporal. A equação (4.3) apresenta a comparação entre as máximas amplitudes dos sistemas com controle e sem controle.

$$\Delta_p = \frac{p_{sc} - p_{cc}}{p_{sc}} \times 100, \quad (4.3)$$

onde:

- Δ_p é a diferença percentual dos maiores picos nas respostas temporais dos sistemas com controle e sem controle;
- p_{cc} e o maior pico na resposta temporal do sistema com controle;
- p_{sc} e o maior pico na resposta temporal do sistema sem controle.

Para comparar os esforços de controle necessários para controlar os sistemas, utilizou-se um atuador hidro-pneumático de referência. Este foi adotado através do catálogo da NEMA [21], com capacidade de $20kW$, curso de até 125 mm e uma seção transversal quadrada de 190 mm de lado. Serão comparadas a potência deste atuador com a potência requerida pelo controlador encontrado.

4.1 Modelo com 2 graus de liberdade

4.1.1 Aplicação das funções de ponderações no modelo

Na seção 3.2, foi apresentado o modelo de estados do sistema e os parâmetros de desempenho. As funções de ponderação utilizadas neste trabalho foram mostradas na seção 3.5 e aplicadas na aceleração vertical do veículo (3.24), no deslocamento relativo da roda (3.25) e no esforço de controle (3.27). Na Figura 4.2 são mostradas as 9 possíveis respostas em frequência da aceleração vertical do sistema sem controle (8 delas representam os extremos gerados pelas incertezas e a outra representa o sistema com valores nominais) quando sujeitas à excitação da pista e a função W_{a1} é mostrada no sentido de ilustrar a região de frequência de maior interesse. Salienta-se que a função de ponderação é usada apenas na fase de projeto do controlador, ou seja, na respectiva solução do problema de otimização.

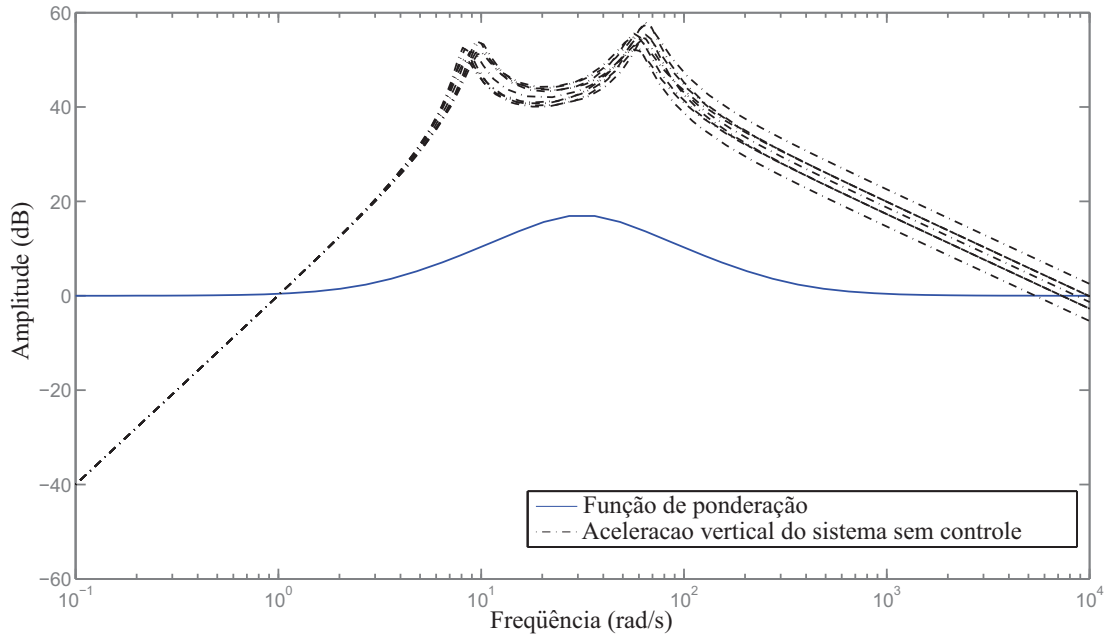


Figura 4.2: 9 possíveis respostas em frequência da aceleração vertical do veículo do sistema sem controle e função de ponderação W_{a1} usada para a aceleração.

Da Figura 4.2, verifica-se que a função W_{a1} pondera com maior intensidade a faixa de frequência de 4 a 8 Hz (25 a 50 rad/s). Espera-se que, ao aplicar esta função de ponderação, a aceleração vertical do veículo seja reduzida com maior importância quando a excitação for nesta faixa de frequência.

Na Figura 4.3 são mostradas as 9 possíveis respostas em frequência do deslocamento relativo da roda do sistema sem controle (8 delas representam os extremos gerados pelas incertezas e a outra representa o sistema com valores nominais) quando sujeitas à excitação da pista e a função $W_{k_{hpi}}$ aplicada.

Da Figura 4.3, verifica-se que a função de ponderação $W_{k_{hpi}}$ pondera com maior intensidade a baixa frequência e com menor intensidade a alta frequência. Portanto, é esperado que o deslocamento relativo da roda seja reduzido.

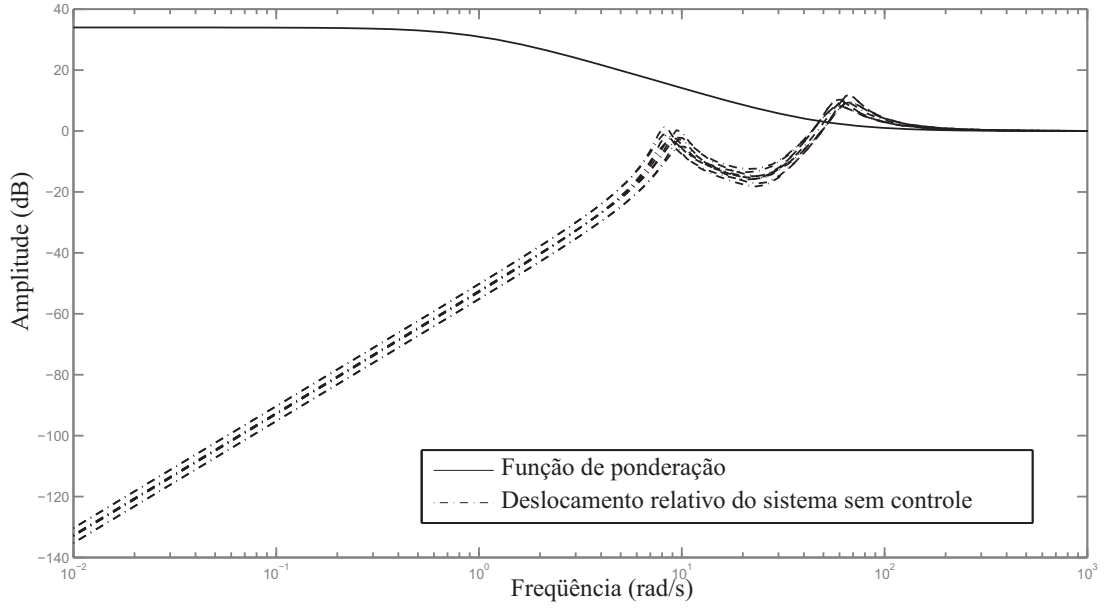


Figura 4.3: 9 possíveis respostas em frequência do deslocamento relativo da roda do sistema sem controle e função de ponderação $W_{k_{hpi}}$ relacionada ao deslocamento relativo da roda.

4.1.2 Resultados obtidos da análise com incertezas no modelo

Com as informações disponíveis na seção 3.6 foi possível projetar um controlador H_∞ . Como descrito anteriormente, deseja-se que o controlador H_∞ tenha bom desempenho para toda a região do envelope convexo associado às variações dos parâmetros devido às incertezas.

Na simulação do modelo de 2 graus de liberdade foi utilizado o pacote *Yalmip*, com o solver *SeDuMi*. Foi utilizado $shift = 10^{-6}$. As variáveis foram definidas pela função *sdpvar* do *Yalmip toolbox*, e o problema de otimização foi resolvido pela função *solvesdp*. As inequações e restrições do problema foram definidas pela função *set* deste mesmo pacote. O tempo para solução do problema de otimização foi de 54 segundos em um computador com processador *Core(TM)2 Duo CPU T7250* de 2.00GHz, com 2 GB de memória RAM. Foram realizadas 19 iterações até obter os resultados aqui reportados.

O controlador obtido leva em conta as matrizes de estado (que possuem ordem 4) e a aplicação

das funções de ponderação W_{a1} (que possui ordem 2) e W_{khipi} (que possui ordem 1). Somando a ordem da matriz e das funções de ponderação, é possível obter a ordem do controlador (ordem 7).

As matrizes de estado do controlador obtido neste caso são:

$$A_c = \begin{bmatrix} -1,105 & 14,44 & -65 & 10,81 & 9,467 & -10,79 & 0,6537 \\ 0,2595 & -1456 & 3570 & -93,88 & -634,5 & 314,2 & -282,7 \\ 4,242 & -373,9 & 2329 & -507,5 & -316,6 & 476,3 & 68,25 \\ 2,344 & -1270 & 3839 & -328,5 & -632 & 480,7 & -170,9 \\ 1,809 & -620,3 & 2122 & -248 & -336,3 & 297,3 & -65,6 \\ -1,575 & 577 & -1937 & 214,9 & 308,1 & -282,1 & 97,15 \\ -1,176 & 46,86 & -551,6 & 141,4 & 65,82 & -151,5 & -54,85 \end{bmatrix}; \quad (4.4)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -44,02 \\ -1,51 \cdot 10^8 \\ 2311 \\ -9,85 \cdot 10^7 \\ 4,66 \cdot 10^8 \\ -3795 \\ 539,3 \end{bmatrix}; \quad (4.5)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 8326 & -16,41 & 69,3 & -10,66 & -10,25 & -10,25 & 11,29 & -0,639 \end{bmatrix}; \quad (4.6)$$

Para verificar o desempenho deste controlador, foi avaliado o comportamento do mesmo no controle das plantas dos 8 extremos correspondentes aos modelos incertos, conforme valores mostrados na Tabela 3.4, e no ponto nominal, conforme valores mostrados na Tabela 3.1.

A Tabela 4.1 apresenta os valores das normas H_∞ das funções de transferência devido às irregularidades da pista para os 8 extremos associados a cada parâmetro incerto, onde $\|P_{zw}\|_\infty$ representa o maior pico da resposta em frequência do sistema sem controle, $\|T_{zw}\|_\infty$ representa o maior pico da resposta em frequência do sistema com controle e a diferença Δ_{zw} , calculada por:

$$\Delta_{zw} = \left(\frac{\|P_{zw}\|_\infty - \|T_{zw}\|_\infty}{\|P_{zw}\|_\infty} \right) \times 100, \quad (4.7)$$

representa a variação percentual dos picos das respostas em frequência dos sistemas sem controle e com controle.

Tabela 4.1: Valores das normas H_∞ de cada critério de desempenho - modelo de 2 graus de liberdade.

Desempenho	$\ P_{zw}\ _\infty$	$\ T_{zw}\ _\infty$	Δ_{zw}
Aceleração vertical do veículo no Extremo 1	544,9380	3,6503	-99,33
Aceleração vertical do veículo no Extremo 2	740,6533	3,6832	-99,50
Aceleração vertical do veículo no Extremo 3	586,2593	3,2749	-99,44
Aceleração vertical do veículo no Extremo 4	796,2336	3,3893	-99,57
Aceleração vertical do veículo no Extremo 5	410,9024	3,0252	-99,26
Aceleração vertical do veículo no Extremo 6	558,3612	3,0528	-99,45
Aceleração vertical do veículo no Extremo 7	453,2652	3,0046	-99,33
Aceleração vertical do veículo no Extremo 8	601,6696	3,1053	-99,48
Aceleração vertical do veículo para Valores Nominais	573,2477	3,2390	-99,43
Deslocamento relativo da roda no Extremo 1	3,0508	1,7839	-41,52
Deslocamento relativo da roda no Extremo 2	2,9893	1,7836	-40,33
Deslocamento relativo da roda no Extremo 3	3,9613	2,1733	-45,13
Deslocamento relativo da roda no Extremo 4	3,8736	2,1725	-43,91
Deslocamento relativo da roda no Extremo 5	2,5711	1,6050	-37,57
Deslocamento relativo da roda no Extremo 6	2,5928	1,6046	-38,11
Deslocamento relativo da roda no Extremo 7	3,3212	1,8820	-43,33
Deslocamento relativo da roda no Extremo 8	3,3405	1,8816	-43,67
Deslocamento relativo da roda para Valores Nominais	3,1249	1,8283	-41,49

Verificando os valores da Tabela 4.1, conclui-se que o controlador reduz em até 45% o valor da norma H_∞ relacionada com o deslocamento relativo da roda, e em quase 100% o valor da norma H_∞ relacionada à aceleração vertical do veículo.

As respostas em frequência da aceleração vertical do veículo são ilustradas na Figura 4.4. É

possível verificar que o controlador reduz consideravelmente as acelerações entre as frequências de 4 a 8 Hz, que é a frequência que os seres humanos possuem maior sensibilidade.

As respostas em frequência do deslocamento da roda em relação ao solo são ilustradas na Figura 4.5. É possível verificar que, quando comparado com a resposta em frequência do modelo sem controle, o controlador atua de forma a reduzir o maior pico da resposta em frequência em até 45%.

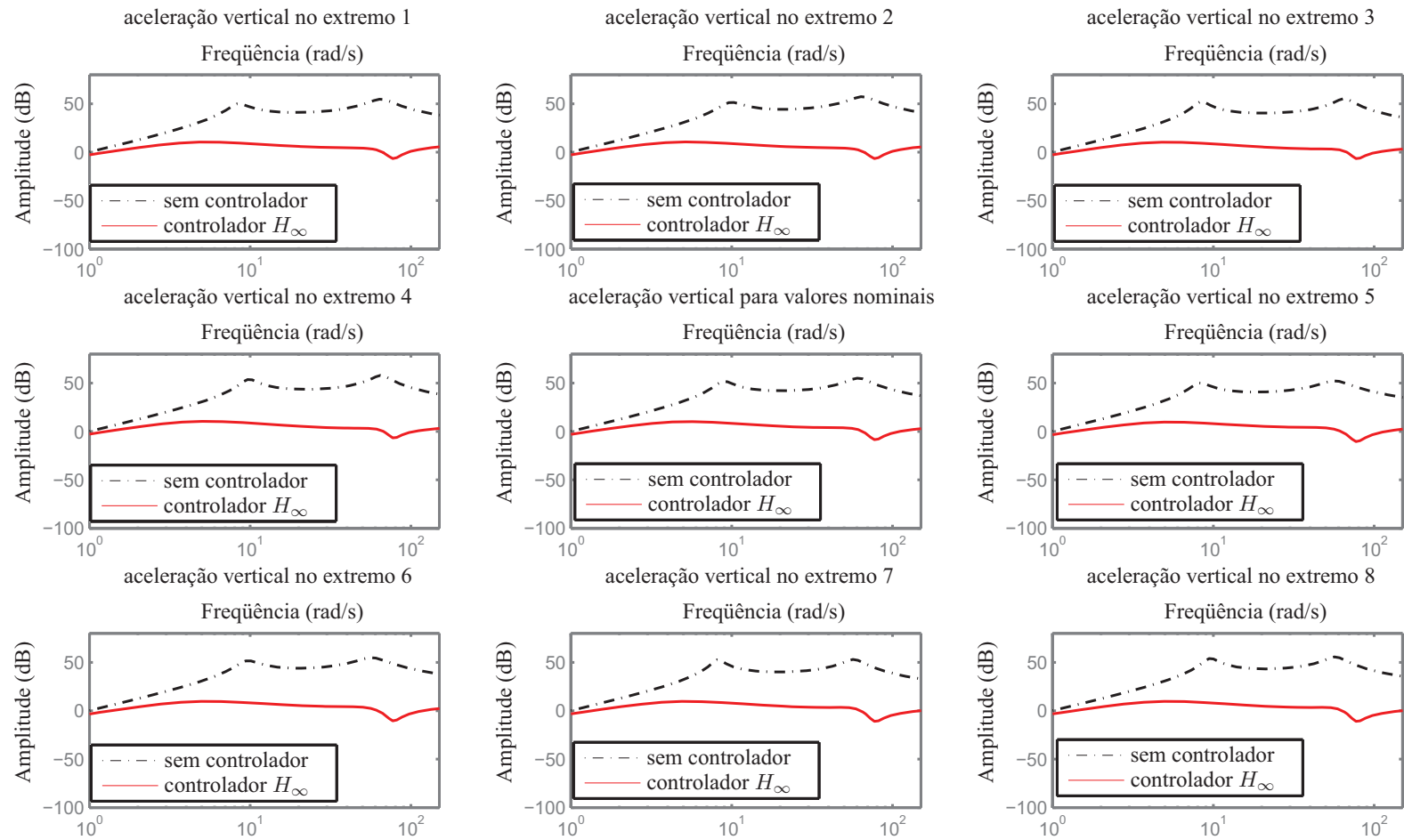


Figura 4.4: Respostas em frequência do modelo de dois graus de liberdade, sem controlador e com controlador H_∞ , relacionados com a aceleração vertical do veículo.

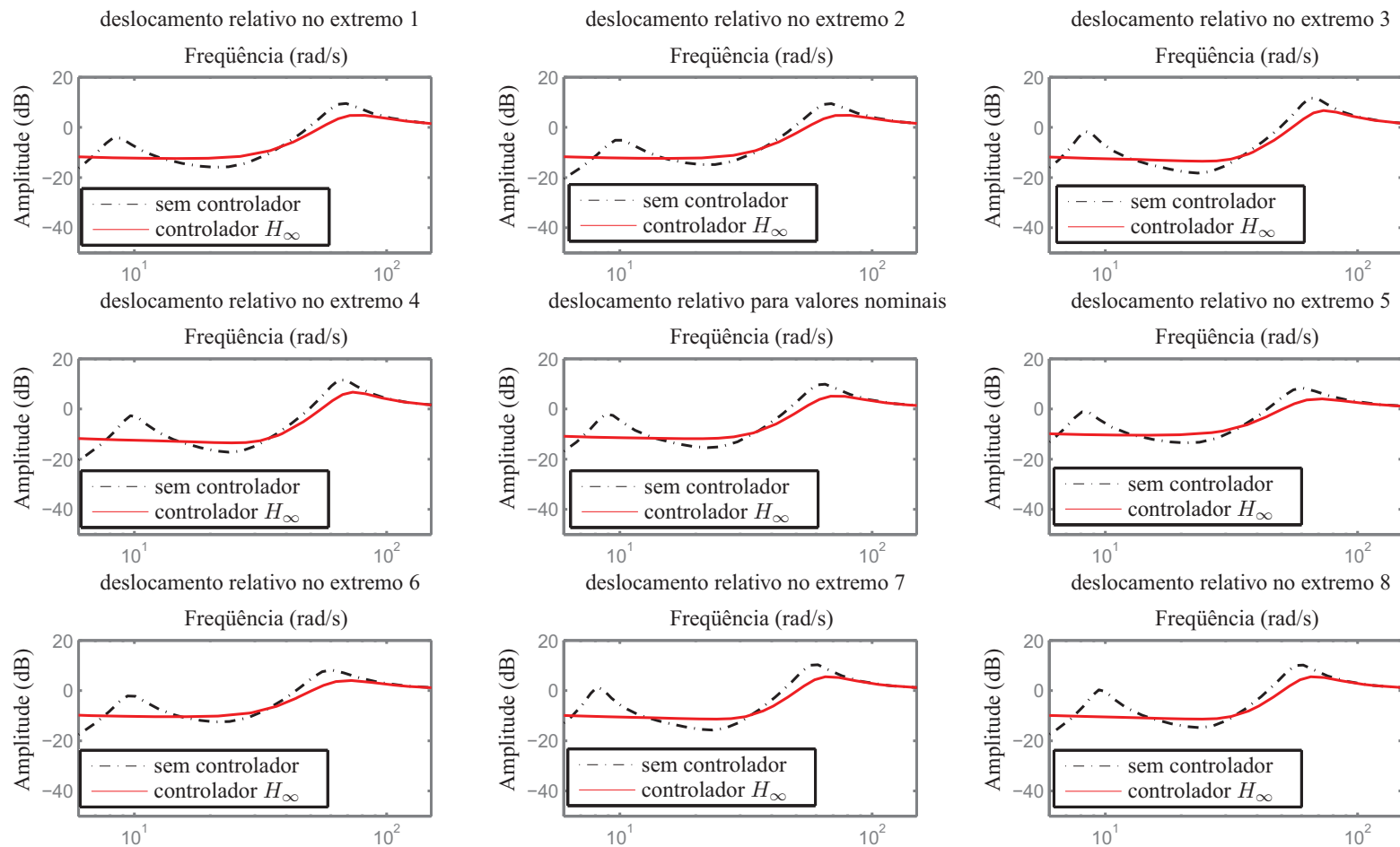


Figura 4.5: Respostas em frequência do modelo de dois graus de liberdade, sem controlador e com controlador H_∞ , relacionados com o deslocamento relativo da roda.

A Figura 4.6 representa o comportamento da aceleração vertical do veículo após o mesmo passar pelo obstáculo, dado pelo perfil da equação 4.1. Conclui-se que o controlador projetado reduz a aceleração vertical do sistema, melhorando o conforto dos passageiros.

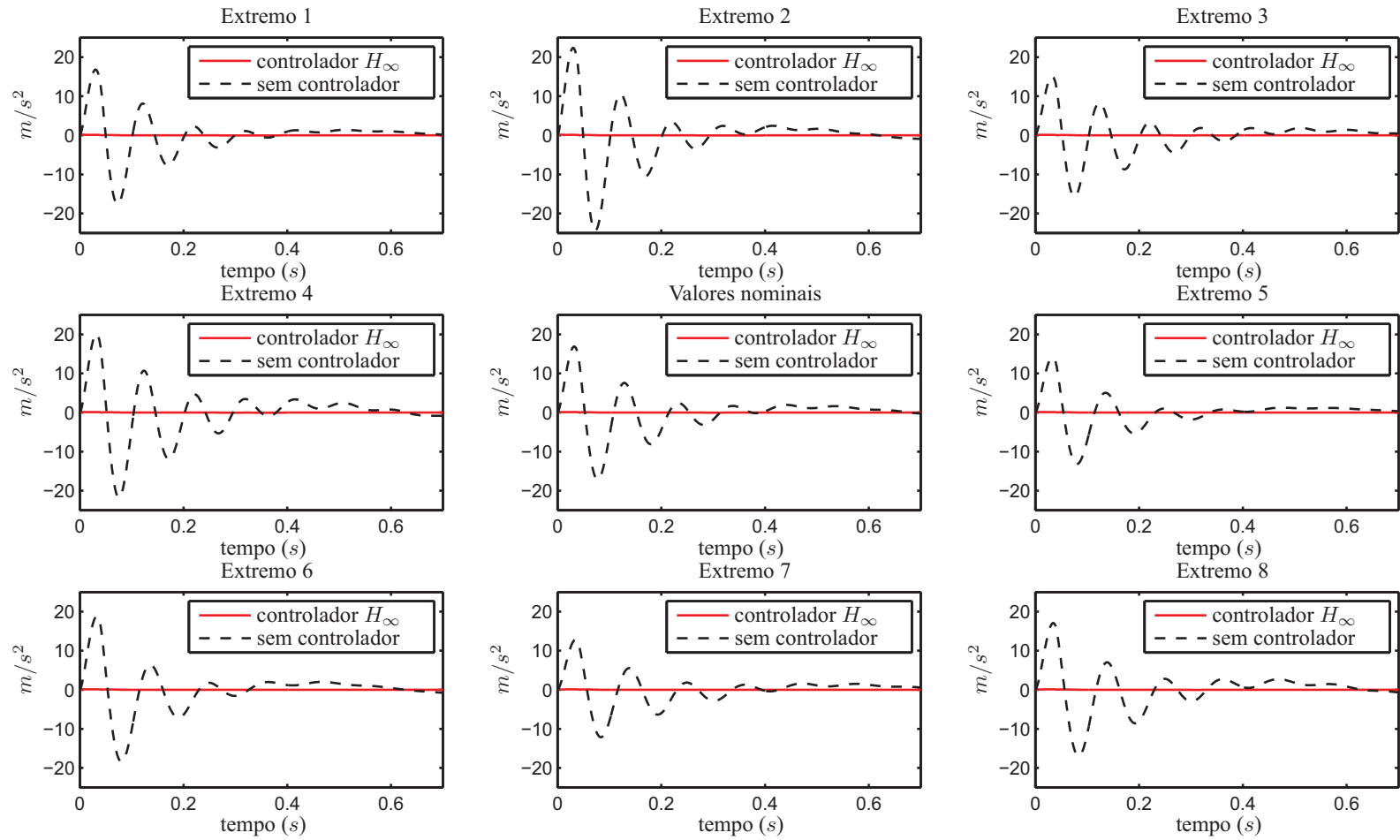


Figura 4.6: Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.2 mostra o tempo de estabilização à 5%, calculado da maneira como mostrada na seção 4.1.1, dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. A forma desta comparação é mostrada pela equação (4.2). O tempo de estabilização foi maior que o do sistema sem controle nos extremos 1 e 2.

Tabela 4.2: Tempo de estabilização a 5% da aceleração vertical do veículo

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	0,62	0,67	8,96
2	0,53	0,67	26,92
3	0,99	0,70	-28,99
4	0,86	0,70	-18,20
5	0,99	0,70	-29,47
6	0,86	0,70	-18,52
7	1,39	0,71	-49,15
8	1,20	0,71	-41,06
Nominal	0,92	0,70	-24,38

A Tabela 4.3 mostra o valor do maior pico da aceleração vertical dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. Esta é feita de acordo com a equação (4.3). A partir dos valores desta tabela é possível concluir que, apesar do aumento nos tempos de estabilização nos extremos 1 e 2, o valor do maior pico do sistema com controle é muito menor que o maior pico do sistema sem controle, melhorando o conforto dos passageiros do veículo.

A Figura 4.7 apresenta o comportamento do deslocamento relativo entre a roda e a pista quando o veículo passa pelo obstáculo. Verifica-se que no sistema com controle ocorre uma redução do deslocamento ao longo do tempo, além de reduzir o tempo de estabilização.

Tabela 4.3: Máximo valor do pico da aceleração vertical do veículo ao passar pelo obstáculo

Extremo	$p_{sc} (m/s^2)$	$p_{cc} (m/s^2)$	$\Delta_m (\%)$
1	16,8091	0,1445	-99,14
2	22,3744	0,1433	-99,35
3	15,0842	0,1275	-99,15
4	20,1155	0,1279	-99,36
5	14,1260	0,1176	-99,16
6	18,7702	0,1180	-99,37
7	12,8237	0,1141	-99,11
8	17,0755	0,1145	-99,33
Nominal	16,8997	0,1239	-99,27

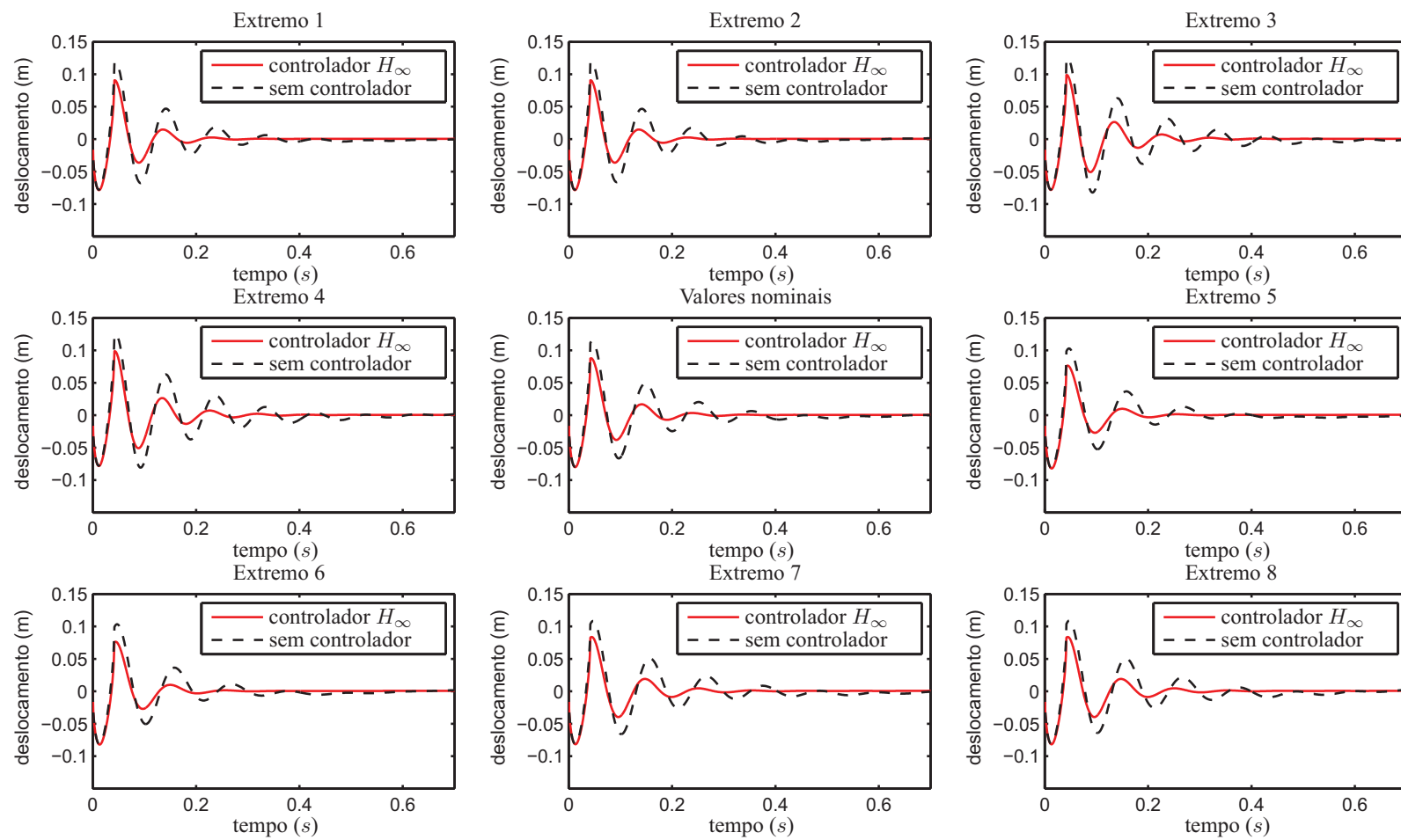


Figura 4.7: Deslocamento relativo da roda após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.4 mostra o tempo de estabilização à 5% dos sistemas sem controle, com controle e uma comparação entre esses valores para o deslocamento relativo da roda. Esta comparação obedece à equação (4.2). Nota-se que, a partir dos valores desta tabela, que houve uma redução no tempo de estabilização entre 37% e 61%.

Tabela 4.4: Tempo de estabilização a 5% do deslocamento relativo da roda

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	0,34	0,19	-43,55
2	0,30	0,19	-36,84
3	0,48	0,24	-51,16
4	0,49	0,24	-51,26
5	0,29	0,17	-41,42
6	0,44	0,17	-61,42
7	0,55	0,26	-53,35
8	0,54	0,26	-52,31
Nominal	0,42	0,20	-51,24

A Tabela 4.5 mostra o valor do maior pico do deslocamento relativo das rodas nos sistemas sem controle, com controle e uma comparação entre esses valores. Esta comparação obedece à equação (4.3). Verifica-se que, além da redução no tempo de estabilização, houve também uma redução no máximo valor de pico entre 20% e 26%.

A equação (4.8) ilustra o cálculo da potência dada pelo atuador:

$$Pot = |u\dot{x}_1| + |u\dot{x}_2|, \quad (4.8)$$

onde Pot é a potência necessária para controlar o sistema.

A Figura 4.8 ilustra a potência necessária para controlar o sistema quando sujeito ao obstáculo. É possível verificar que o controlador necessita de até $20kW$ para atenuar a resposta do sistema. Comparando com o atuador de referência adotado, a capacidade do atuador projetado é compatível.

Tabela 4.5: Máximo valor do deslocamento relativo da roda

Extremo	m_{sc} (m)	m_{cc} (m)	Δ_m (%)
1	0,1186	0,0909	-23,35
2	0,1192	0,0908	-23,82
3	0,1244	0,0989	-20,49
4	0,1247	0,0988	-20,76
5	0,1028	0,0765	-25,58
6	0,1034	0,0764	-26,11
7	0,1084	0,0839	-22,60
8	0,1088	0,0838	-22,97
Nominal	0,1143	0,0879	-23,10

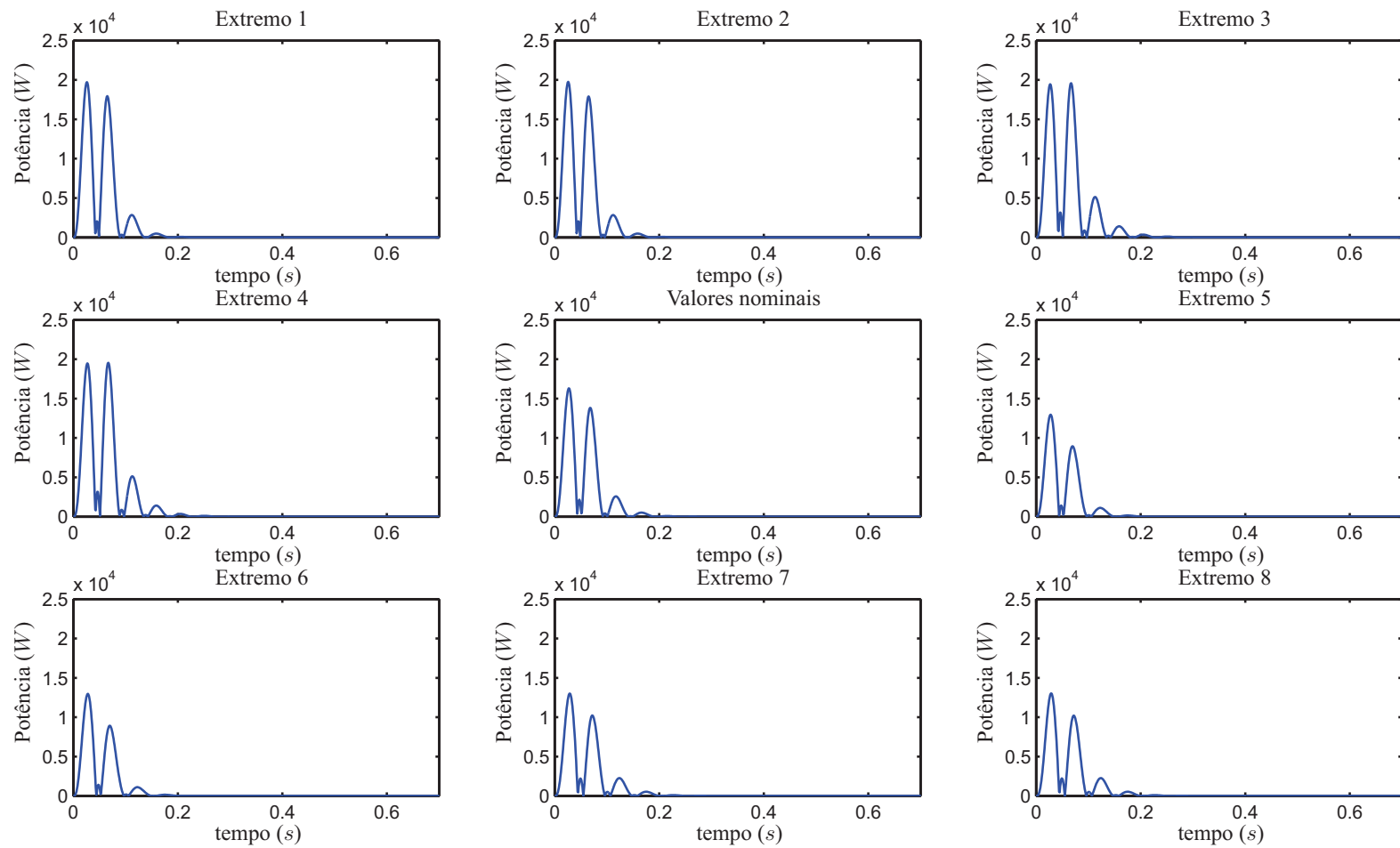


Figura 4.8: Potência necessária para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

4.2 Modelo com 4 graus de liberdade

4.2.1 Aplicação das funções de ponderações no modelo

Na seção 3.3, foram apresentadas as matrizes de estado do sistema, as medidas de desempenho de desempenho e os sinais de medição do modelo da suspensão com 4 graus de liberdade. As funções de ponderação utilizadas neste trabalho, baseadas no trabalho do Wang [35], foram mostradas na seção 3.5 e aplicadas à saída de desempenho da aceleração vertical do veículo, ao deslocamento relativo da roda e ao esforço de controle. Segundo o estudo do Wang, estas funções de ponderação satisfizeram as condições de conforto, baseada na faixa de frequência de maior sensibilidade humana mostrada na norma ISO 2631 [13], e de segurança.

Na resposta em frequência, o modelo de 4 graus de liberdade possui 4 picos. Entretanto, para este modelo, os valores das amplitudes de dois picos ficaram muito próximos aos valores dos outros dois picos. Portanto, fica difícil visualizar as quatro amplitudes nas Figuras 4.9 e 4.10.

Na Figura 4.9 são mostradas as 9 possíveis respostas em frequência da aceleração vertical do sistema sem controle (8 delas representam os extremos gerados pelas incertezas e a outra representa o sistema com valores nominais) quando sujeitas à excitação da pista e a função W_{a1} aplicada.

Da Figura 4.9, verifica-se que a função W_{a1} pondera com maior intensidade a faixa de frequência de 4 a 8 Hz e, conforme se afasta dela, diminui-se a ponderação. Espera-se que, ao aplicar esta função de ponderação, a aceleração vertical do veículo seja reduzida quando a excitação do mesmo for nesta faixa de frequência.

Na Figura 4.10 são mostradas as 9 possíveis respostas em frequência do deslocamento relativo da roda do sistema sem controle (8 delas representam os extremos gerados pelas incertezas e a outra representa o sistema com valores nominais) quando sujeitas à excitação da pista e a função W_{khipi} aplicada.

Da Figura 4.10, verifica-se que a função de ponderação W_{khipi} pondera com maior intensidade a baixa frequência e com menor intensidade a alta frequência, procurando fazer com que as funções de transferência de malha fechada apresentem um comportamento pré-definido. Portanto, é esperado que o deslocamento relativo da roda seja reduzido quando a excitação do veículo for menor ou igual à frequência do maior pico.

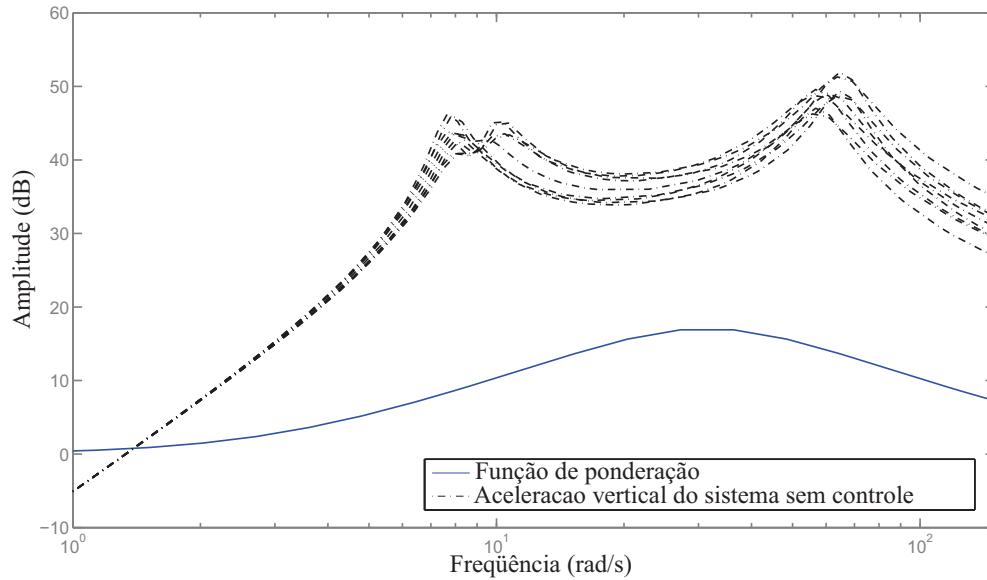


Figura 4.9: 9 possíveis respostas em frequência da aceleração vertical do veículo do sistema sem controle e função de ponderação W_{a1} usada para a aceleração.

4.2.2 Resultados obtidos da análise com incertezas no modelo

Com as informações disponíveis na seção 3.6 foi possível projetar um controlador H_∞ . Como descrito anteriormente e da mesma forma que foi feito para o modelo de 2 graus de liberdade, deseja-se que o controlador H_∞ tenha bom desempenho para toda a região do envelope convexo associado às variações dos parâmetros devido às incertezas.

Na simulação do modelo de 4 graus de liberdade foi utilizado o pacote *Yalmip*, com o solver *SeDuMi*. Foi usado $shift = 10^{-3}$. As variáveis foram definidas pela função *sdpvar* do *Yalmip toolbox*, e o problema de otimização resolvido pela função *solvesdp*. As inequações e restrições do problema foram definidas pela função *set* deste mesmo pacote. O tempo de processamento para a solução do problema de otimização foi de 71 segundos no mesmo computador citado na seção anterior. Foram realizadas 37 iterações até obter os resultados aqui reportados.

O controlador obtido leva em conta as matrizes de estado (que possuem ordem 8) e a aplicação das funções de ponderação W_{a1} , $W_{\hat{\theta}}$ (que possuem ordem 2) e $W_{k\hat{p}i}$ (que possui ordem 1). So-

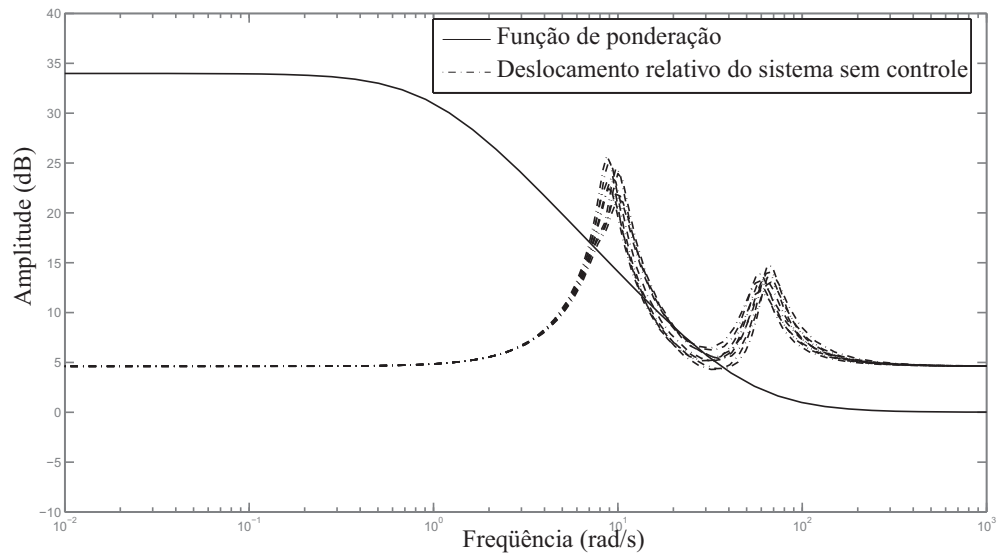


Figura 4.10: 9 possíveis respostas em frequência do deslocamento relativo da roda do sistema sem controle e função de ponderação $W_{k_{hpi}}$ relacionada ao deslocamento relativo da roda.

mando a ordem da matriz e das funções de ponderação, é possível obter a ordem do controlador (ordem 13).

As matrizes de estado do controlador obtido neste caso são:

$$A_c = \begin{bmatrix} -1,414 & -97,9 & -124,1 & 95,94 & -79,34 & -2,049 & -7,247 & -33,38 & -120,3 & -148,1 & -26,48 & 5,407 & 0,7128 \\ 10,85 & -251,3 & 441,8 & 764,1 & 285,1 & -8,423 & 152,4 & 268,4 & 349,8 & 128,3 & -37,01 & -6,092 & -6,33 \\ -38,18 & -332,2 & 572,2 & -1433 & 117,3 & -146,6 & -387,9 & -1220 & -635,2 & -609,1 & 181,3 & 21,36 & 20,25 \\ -40,32 & -271,8 & 575,4 & -1548 & 152,9 & -150,9 & -411,9 & -1280 & -679 & -635,2 & 190,2 & 21,71 & 21,56 \\ -7,986 & 287,8 & -388,4 & -762 & -291,5 & 20,55 & -122,7 & -168,8 & -277,7 & -48,02 & 28,86 & 2,429 & 4,719 \\ -28,58 & -302,5 & 600,8 & -954,7 & 169,1 & -144,1 & -249,6 & -883,5 & -414,3 & -450,3 & 134,3 & 14,63 & 14,6 \\ -15,62 & -50,8 & 149,9 & -658,4 & -11,28 & -72,64 & -185,7 & -467,3 & -283,7 & -228,8 & 70,82 & 7,924 & 8,237 \\ 15,47 & 340,8 & -519,7 & 310,3 & -226,9 & 90,92 & 135,2 & 543,7 & 197,2 & 320,7 & -73,18 & -10,72 & -8,122 \\ 13,31 & 121,4 & -275,1 & 480,7 & -74,06 & 54,55 & 129,2 & 406 & 186,2 & 193,5 & -66,85 & -6,198 & -6,714 \\ -10,79 & -123 & 246,6 & -354,7 & 79,46 & -47,91 & -102,8 & -343,6 & -147,3 & -169,6 & 61,39 & 5,511 & 5,403 \\ 8,539 & 179,7 & -370,5 & 203,9 & -161,7 & 52,68 & 71,84 & 297,1 & 53,51 & 119 & -51,28 & -3,456 & -4,197 \\ -1,962 & 611,9 & 1728 & -1439 & 619,3 & -10,2 & 19,77 & 143,5 & 1182 & 1446 & 298,8 & -67,07 & -5,576 \\ -1,454 & 216,3 & 570,9 & -486,2 & 224,4 & -5,821 & 0,3672 & 28,57 & 384,3 & 472,5 & 103,1 & -26,08 & -2,244 \end{bmatrix}; \quad (4.9)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -391,7 \\ 4525 \\ -1,31.10^8 \\ -1,36.10^8 \\ 6960 \\ 1,01.10^7 \\ -6718 \\ 8,16.10^7 \\ -6,74.10^7 \\ 4,65.10^7 \\ 6,54.10^7 \\ 819,7 \\ 18,2 \end{bmatrix}; \quad (4.10)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -0,2084 & -1,893 & 3,721 & -7,375 & 0,7848 & -0,8342 & -2,036 & -6,369 & -3,276 & -3,296 & 0,9507 & 0,1073 & 0,1083 \\ -0,2084 & -1,893 & 3,721 & -7,375 & 0,7848 & -0,8342 & -2,036 & -6,369 & -3,276 & -3,296 & 0,9507 & 0,1073 & 0,1083 \end{bmatrix}; \quad (4.11)$$

Para verificar o desempenho deste controlador, foi avaliado o comportamento do mesmo no controle das 8 plantas dos 8 extremos correspondentes aos modelos incertos, conforme mostrado na Tabela 3.5, e no ponto nominal dado na Tabela 3.2.

A Tabela 4.6 apresenta os valores das normas H_∞ da função de transferência entre o distúrbio (irregularidade da pista) para os extremos associados a cada parâmetro incerto, onde $\|P_{zw}\|_\infty$ representa o maior pico da resposta em frequência do sistema sem controle, $\|T_{zw}\|_\infty$ representa o maior pico da resposta em frequência do sistema com controle e a diferença percentual Δ_{zw} , calculada da maneira apresentada na equação (4.7).

Verificando os valores da Tabela 4.6, conclui-se que o controlador reduz em até 40% o valor da norma H_∞ relacionada ao deslocamento relativo da roda, e em até 15% o valor da norma H_∞ relacionada à aceleração vertical do veículo.

A resposta em frequência da aceleração vertical do veículo é ilustrada na Figura 4.11. É possível verificar que o controlador reduz as acelerações entre as frequências de 4 a 8 Hz.

A resposta em frequência do deslocamento das rodas em relação ao solo é ilustrada na Figura 4.12. É possível verificar que, quando comparado com a resposta em frequência do modelo sem controlador, o controlador atua de forma a reduzir o maior pico da resposta em frequência em até 40%.

Tabela 4.6: Valores das normas H_∞ de cada critério de desempenho - modelo de 4 graus de liberdade.

Desempenho	$\ P_{zw}\ _\infty$	$\ T_{zw}\ _\infty$	Δ_{zw}
Aceleração vertical do veículo no Extremo 1	273,0588	253,2285	-7,26
Aceleração vertical do veículo no Extremo 2	375,5133	350,3489	-6,70
Aceleração vertical do veículo no Extremo 3	293,2620	252,9006	-13,76
Aceleração vertical do veículo no Extremo 4	392,8515	343,6259	-12,53
Aceleração vertical do veículo no Extremo 5	205,7424	188,6722	-8,29
Aceleração vertical do veículo no Extremo 6	277,4489	255,9140	-7,76
Aceleração vertical do veículo no Extremo 7	223,2973	189,3345	-15,20
Aceleração vertical do veículo no Extremo 8	299,6887	259,1061	-13,54
Aceleração vertical do veículo para Valores Nominais	286,1732	253,2881	-11,49
Deslocamento relativo da roda no Extremo 1	13,3586	7,9786	-40,27
Deslocamento relativo da roda no Extremo 2	12,0845	8,3747	-30,69
Deslocamento relativo da roda no Extremo 3	17,9979	11,2460	-37,51
Deslocamento relativo da roda no Extremo 4	15,9904	11,6020	-27,44
Deslocamento relativo da roda no Extremo 5	14,3602	8,5837	-40,22
Deslocamento relativo da roda no Extremo 6	12,4449	8,9250	-28,28
Deslocamento relativo da roda no Extremo 7	19,3935	11,7852	-39,23
Deslocamento relativo da roda no Extremo 8	16,5838	12,3744	-25,38
Deslocamento relativo da roda para Valores Nominais	15,4889	9,6927	-37,42

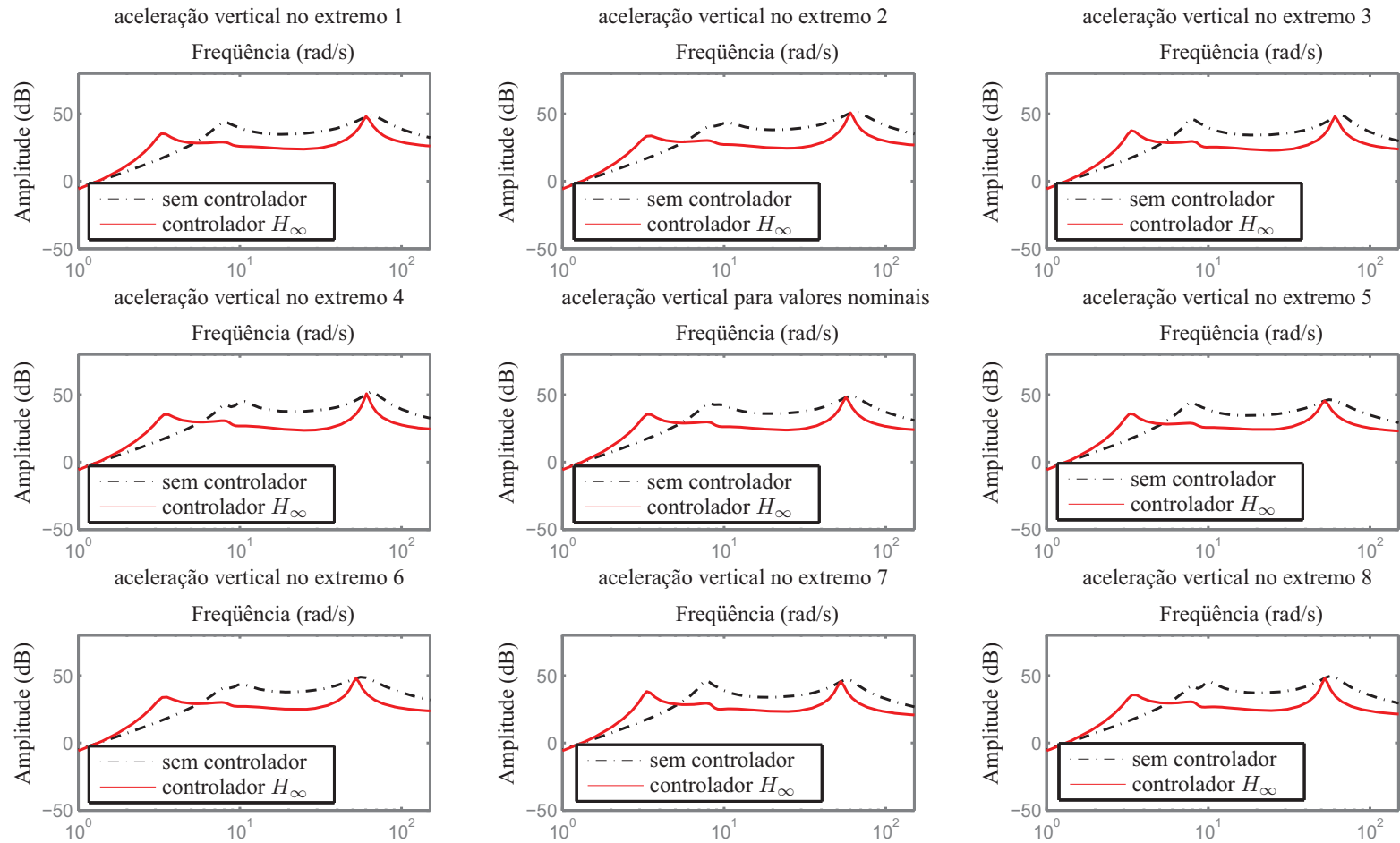


Figura 4.11: Resposta em frequência (aceleração) do sistema sem controlador e com controlador H_∞ projetado.

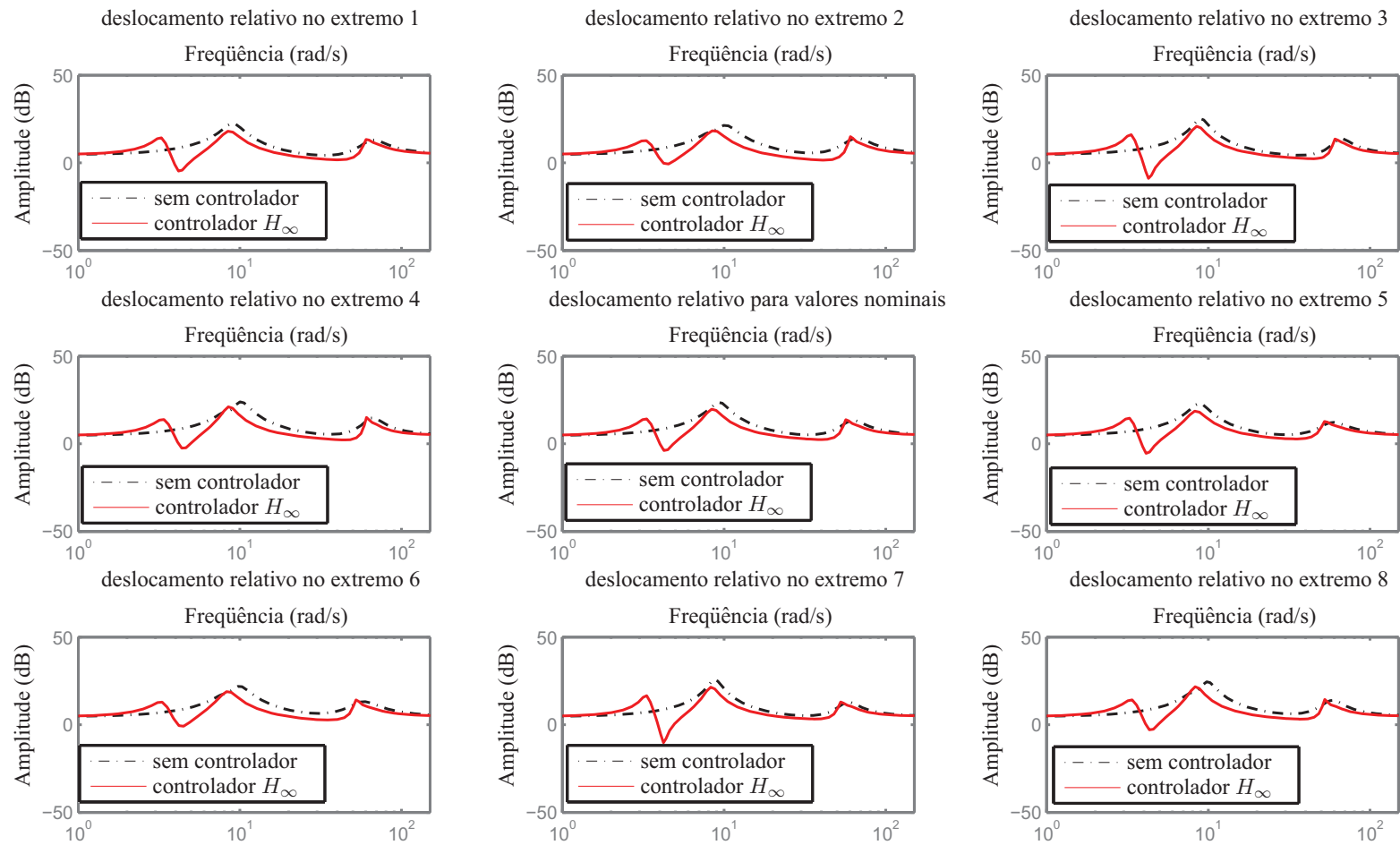


Figura 4.12: Resposta em frequência do sistema (deslocamento relativo da roda) sem controlador e com controlador H_∞ projetado.

A Figura 4.13 representa o comportamento da aceleração vertical do veículo após o mesmo passar pelo obstáculo. Conclui-se que a aceleração vertical do veículo é reduzida para o sistema controlado.

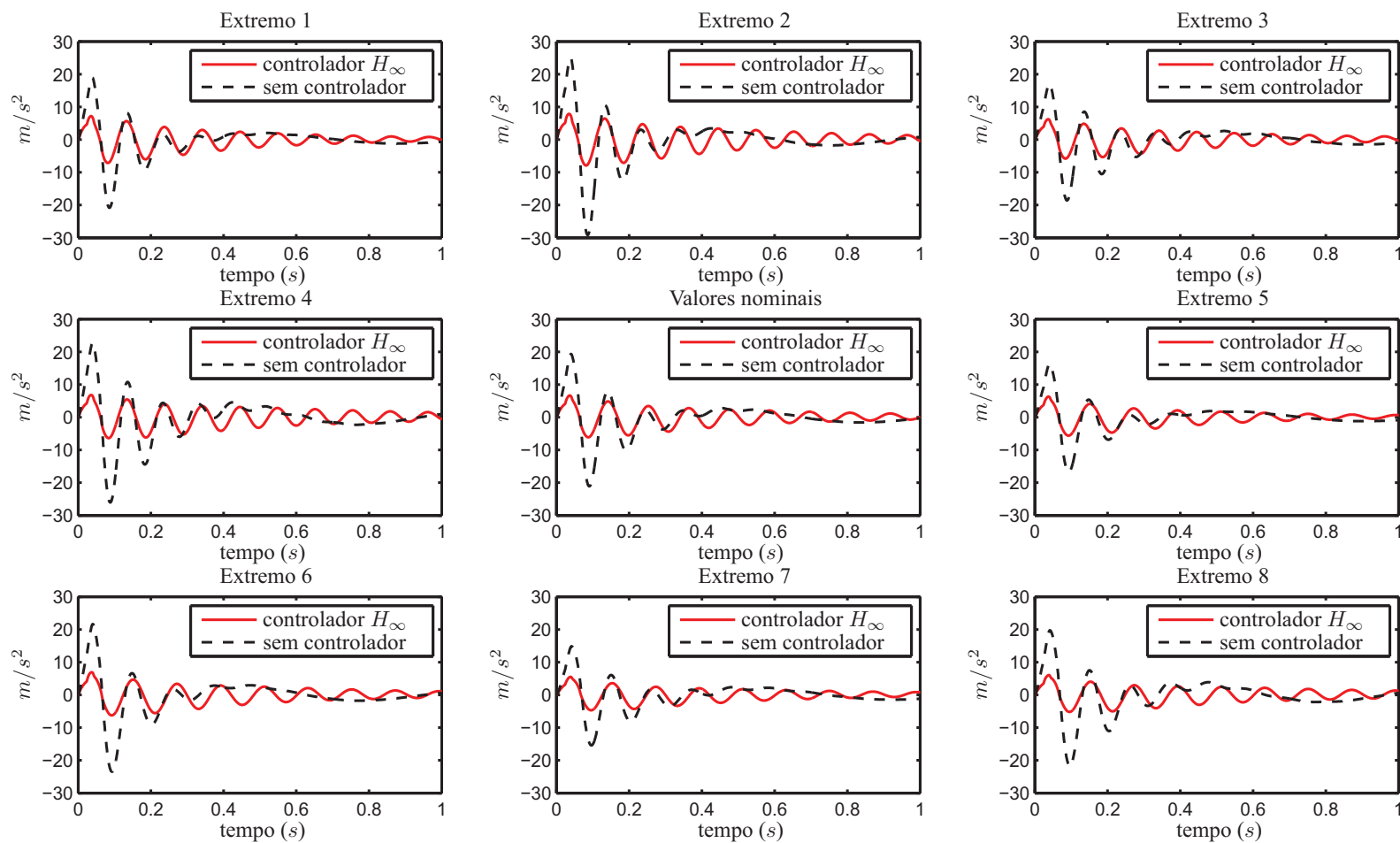


Figura 4.13: Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.7 mostra o tempo de estabilização à 5%, calculado da maneira como mostrada na seção 4.1.1, dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. A forma desta comparação é mostrada pela equação (4.2). O tempo de estabilização do sistema com controle foi maior em todos os extremos.

Tabela 4.7: Tempo de estabilização a 5% da aceleração vertical do veículo

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	0,94	1,29	37,40
2	0,81	1,18	46,76
3	1,30	1,48	13,73
4	1,13	1,35	19,42
5	1,00	1,36	36,22
6	0,86	1,28	48,34
7	1,38	1,48	7,203
8	1,19	1,30	9,366
Nominal	0,93	1,48	58,56

A Tabela 4.8 mostra o valor do maior pico da aceleração vertical dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. Esta é feita de acordo com a equação (4.3). Com essa tabela é possível concluir que, apesar do aumento do tempo de estabilização nos extremos, o valor do maior pico do sistema com controle é até 70% menor que o maior pico do sistema sem controle em todos os extremos. Portanto, o controlador projetado é capaz de melhorar o conforto dos passageiros.

A Figura 4.14 representa o comportamento do deslocamento relativo entre as rodas e a pista ao passar pelo obstáculo. Verifica-se que no sistema com controle ocorre a redução dos picos ao longo do tempo.

Tabela 4.8: Máximo valor da aceleração vertical do veículo

Extremo	$p_{sc} (m/s^2)$	$p_{cc} (m/s^2)$	$\Delta_m (\%)$
1	18,8792	7,1797	-61,97
2	25,0183	7,8603	-68,58
3	17,0975	6,2459	-63,46
4	22,7282	6,8187	-69,99
5	16,3585	6,3185	-61,37
6	21,6718	6,9364	-67,99
7	14,8715	5,5299	-62,81
8	19,7717	6,0499	-69,40
Nominal	19,3316	6,6538	-65,58

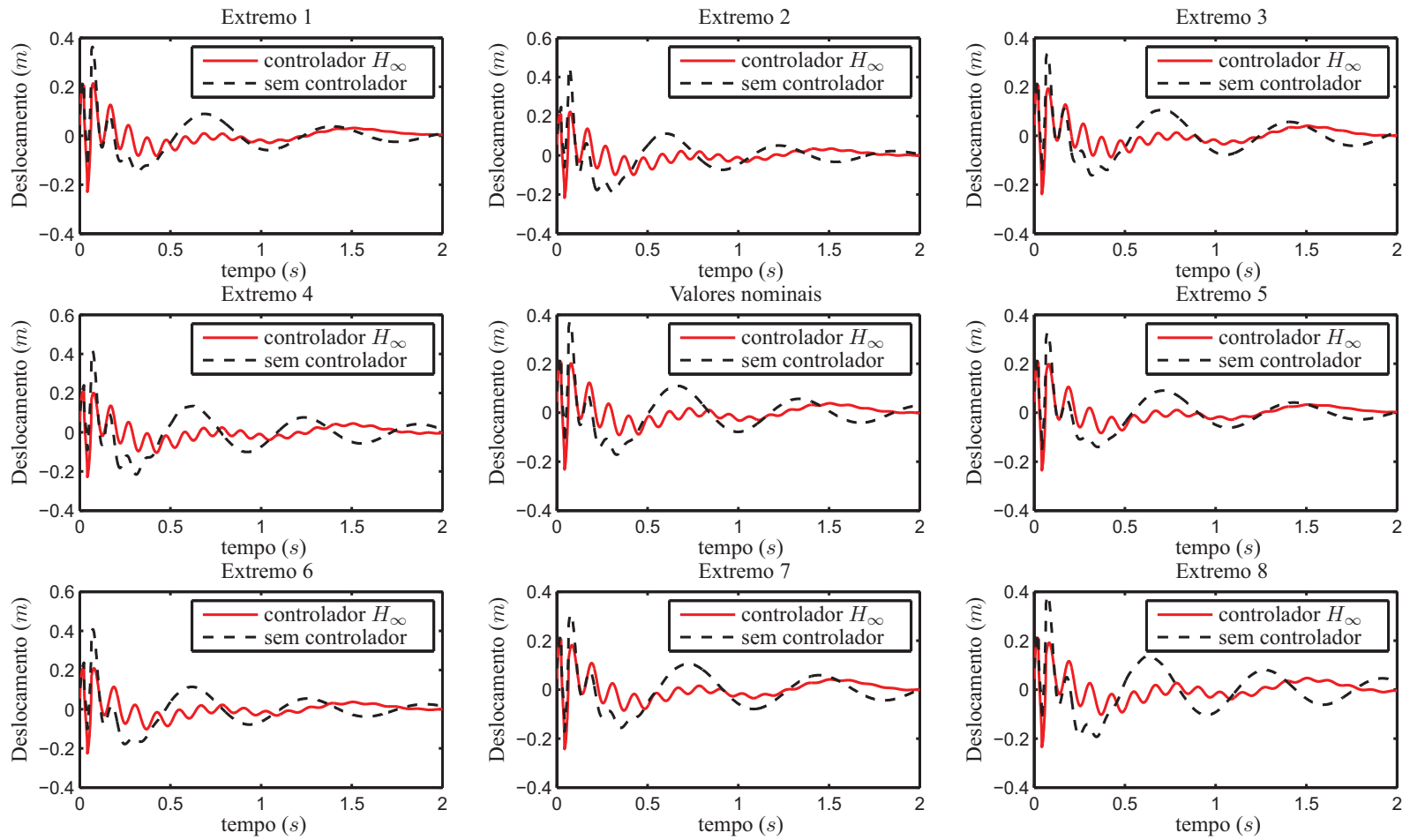


Figura 4.14: Deslocamento relativo das rodas após aplicar um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.9 mostra o tempo de estabilização à 5%, calculado da maneira como mostrada na seção 4.1.1, dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores para o deslocamento relativo das rodas. A forma desta comparação é mostrada pela equação (4.2). Nota-se uma redução no tempo de estabilização entre 4% e 11%.

Tabela 4.9: Tempo de estabilização a 5% do deslocamento relativo das rodas.

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	1,83	1,76	-3,79
2	1,62	1,55	-4,43
3	1,89	1,73	-8,32
4	1,97	1,78	-9,49
5	1,97	1,76	-10,70
6	1,94	1,78	-8,54
7	1,92	1,76	-8,39
8	1,93	1,75	-9,20
Nominal	1,92	1,75	-8,85

A Tabela 4.10 mostra o valor do maior pico deslocamento relativo das rodas dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. Esta é feita de acordo com a equação (4.3). Nota-se que, além da redução do tempo de estabilização, o maior valor da resposta temporal também foi reduzido em todos os extremos em até 50%.

A equação (4.12) ilustra o cálculo da potência na roda dianteira do modelo:

$$Pot_f = \left| u_f (\dot{x}_1 + a\dot{\theta}) \right| + |u_f \dot{x}_2|, \quad (4.12)$$

onde Pot_f é a potência necessária no atuador dianteiro para controlar o sistema. Já a equação (4.13) ilustra o cálculo da potência na roda traseira do modelo:

$$Pot_t = \left| u_t (\dot{x}_1 - b\dot{\theta}) \right| + |u_t \dot{x}_3|, \quad (4.13)$$

onde Pot_t é a potência necessária no atuador traseiro para controlar o sistema.

Tabela 4.10: Máximo valor do deslocamento relativo das rodas

Extremo	$m_{sc} (m)$	$m_{cc} (m)$	$\Delta_m (\%)$
1	0,3632	0,2138	-41,13
2	0,4478	0,2221	-50,40
3	0,3355	0,2067	-38,39
4	0,4160	0,2096	-49,61
5	0,3281	0,2071	-36,87
6	0,4085	0,2099	-48,61
7	0,3079	0,2075	-32,60
8	0,3849	0,2098	-45,49
Nominal	0,3704	0,2082	-43,79

A Figura 4.15 ilustra a potência necessária na suspensão dianteira para controlar o sistema quando sujeito a um distúrbio (obstáculo). É possível verificar que cada controlador necessita de, aproximadamente, $50kW$ para atenuar a resposta do sistema quando sujeito ao obstáculo. Comparando com o atuador de referência adotado, a capacidade do atuador projetado deverá ser maior que a capacidade do atuador de referência. Isto também pode ser verificado na Figura 4.16, que ilustra a potência necessária na suspensão traseira para controlar o sistema quando sujeito a um distúrbio (obstáculo). Uma proposta para diminuir a potência necessária para atenuar as respostas do sistema quando sujeito ao obstáculo será apresentada na seção 4.2.3.

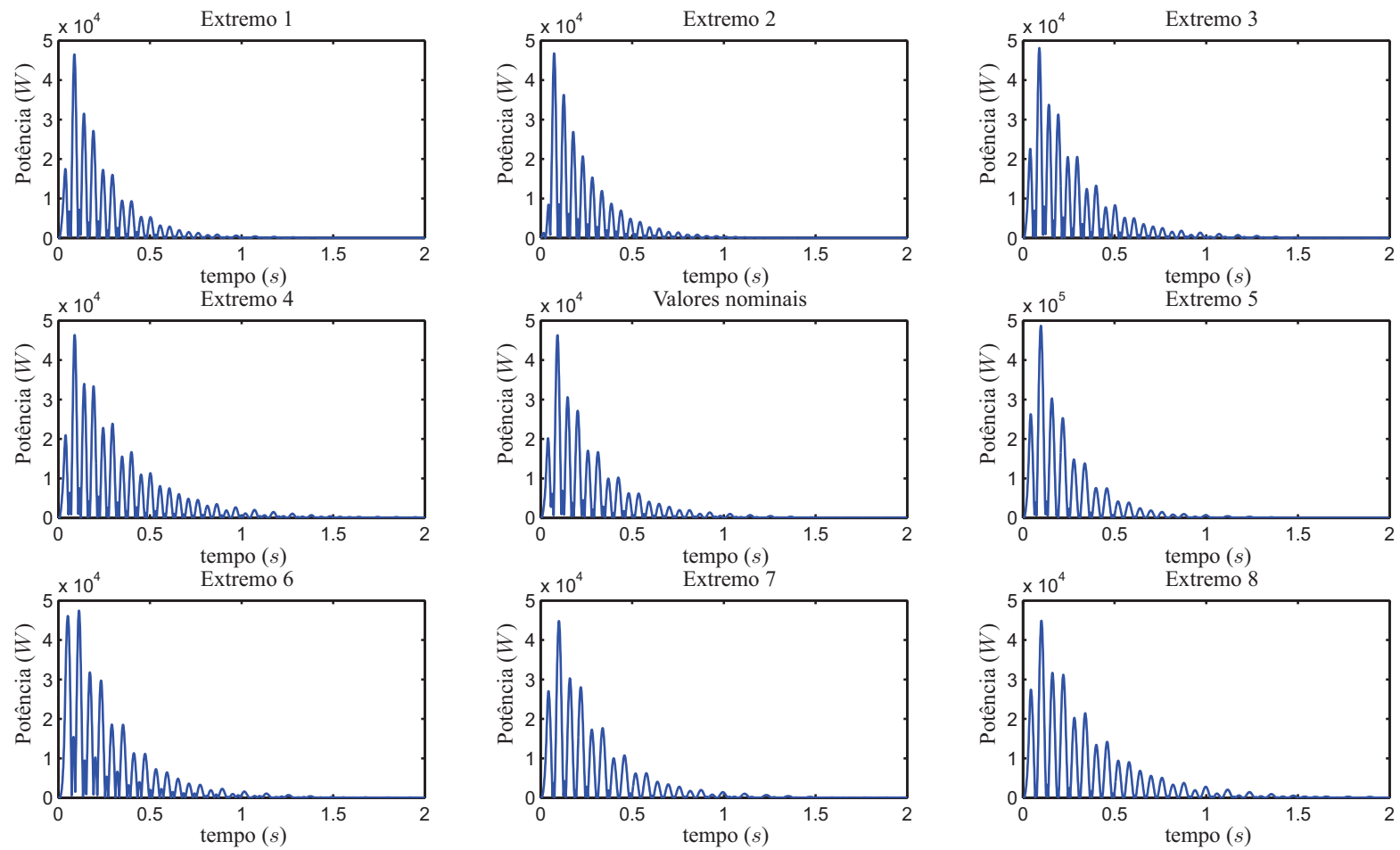


Figura 4.15: Potência necessária na suspensão dianteira necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

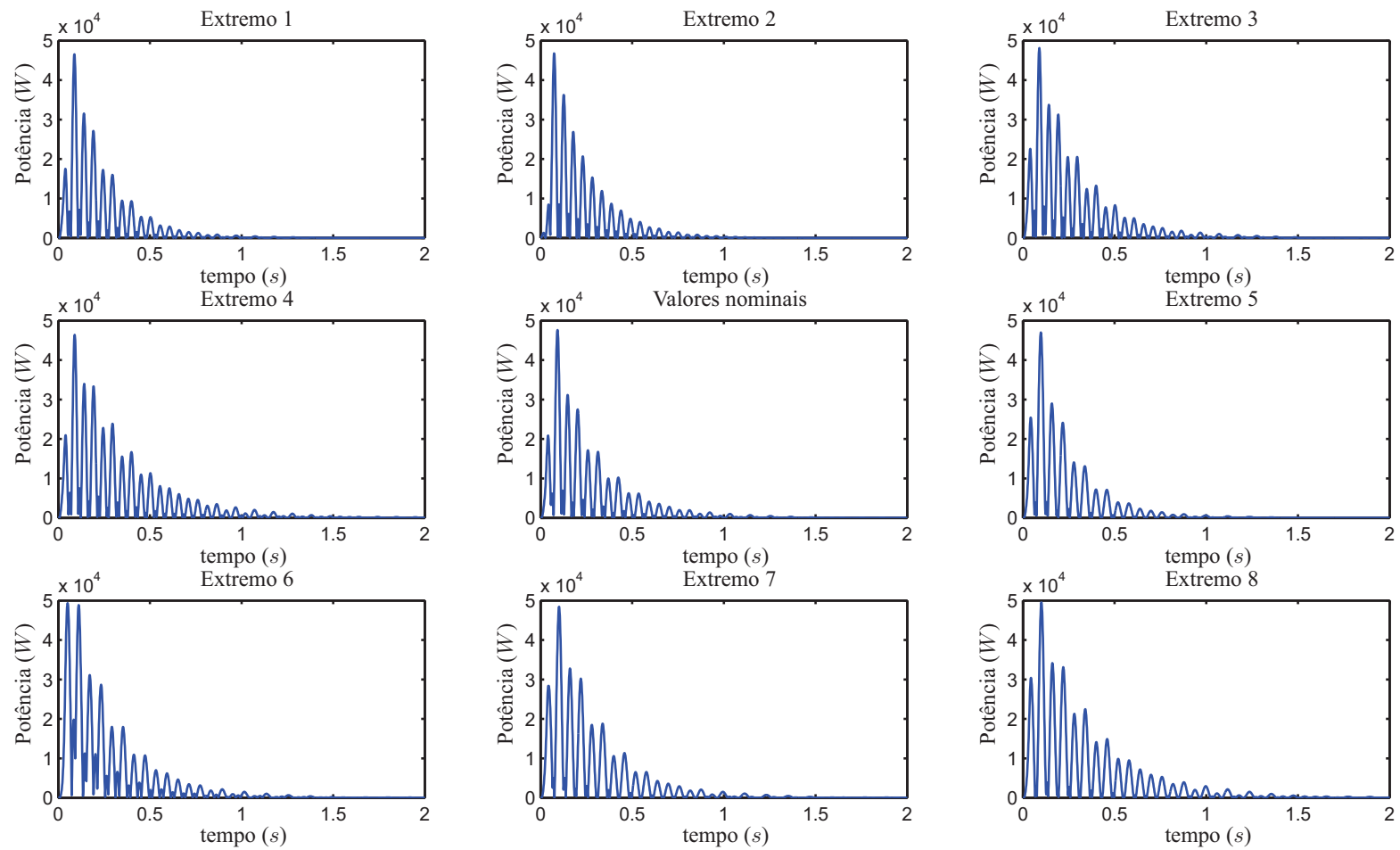


Figura 4.16: Potência necessária na suspensão traseira necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

4.2.3 Reprojetando o controlador limitando a potência necessária em 20 kW

Na seção 4.2.2 foi possível identificar que a potência necessária para controlar as respostas do sistema quando sujeito ao obstáculo foi maior que a potência do atuador de referência adotado. Na tentativa de diminuir essa potência, multiplicou-se a função de ponderação W_u por um fator k_{rp} , como mostra a equação (4.14):

$$W_{urp} = k_{rp}W_u, \quad (4.14)$$

onde:

- W_{urp} é a nova função de ponderação usada no sistema;
- k_{rp} é um número real que multiplica a função de ponderação proposta na seção 3.5, aumentando assim a ponderação para o esforço de controle.

Após algumas tentativas, foi possível verificar que utilizando $k_{rp} = 7,5$ a potência necessária para controlar o sistema não ultrapassa os 20 kW quando o sistema está sujeito ao mesmo obstáculo definido na seção anterior. As Figuras 4.17 e 4.18 ilustram o comportamento da potência quando o veículo passa por este obstáculo. As potências necessárias foram calculadas com base nas equações (4.12) e (4.13).

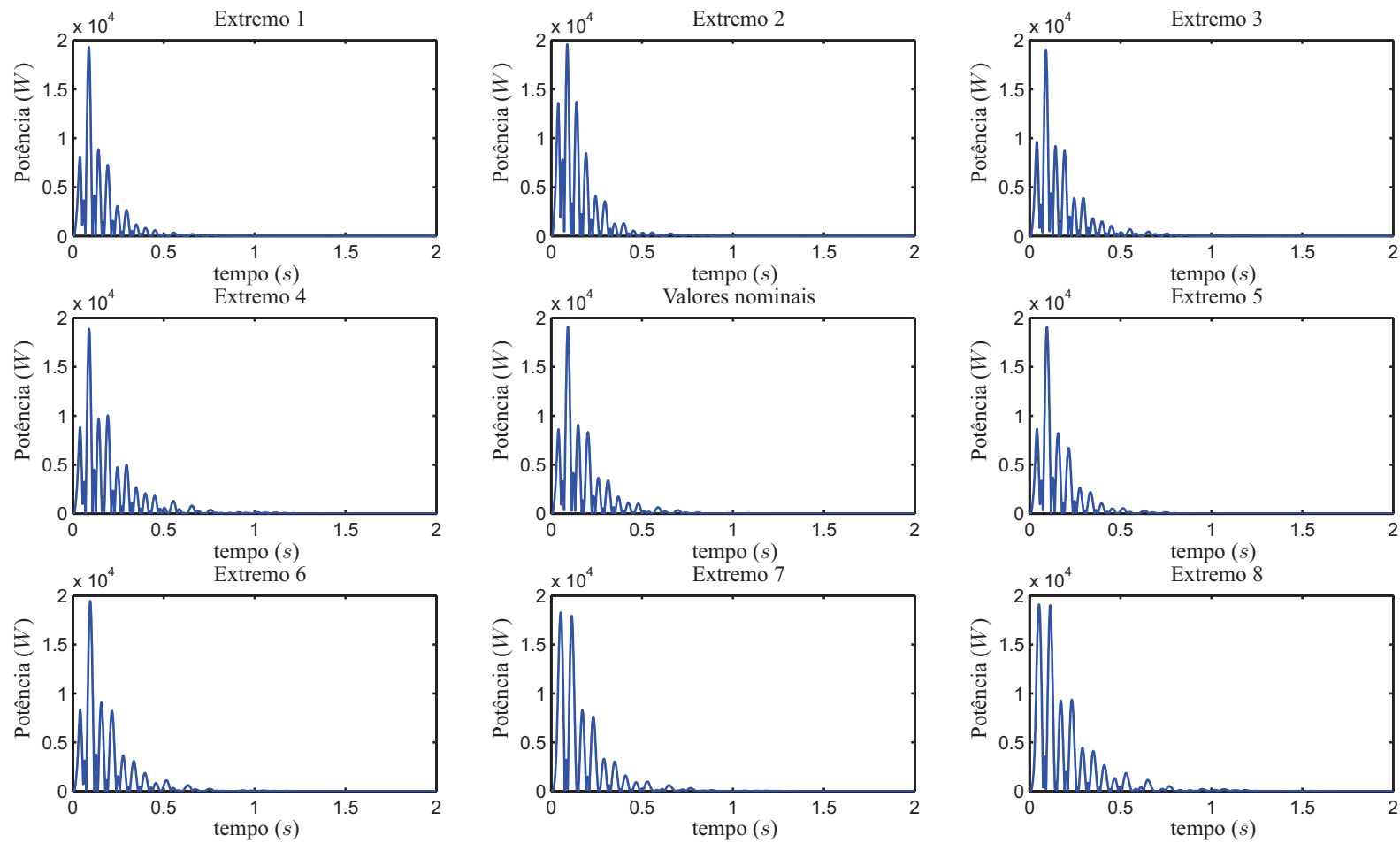


Figura 4.17: Potência necessária na suspensão dianteira necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

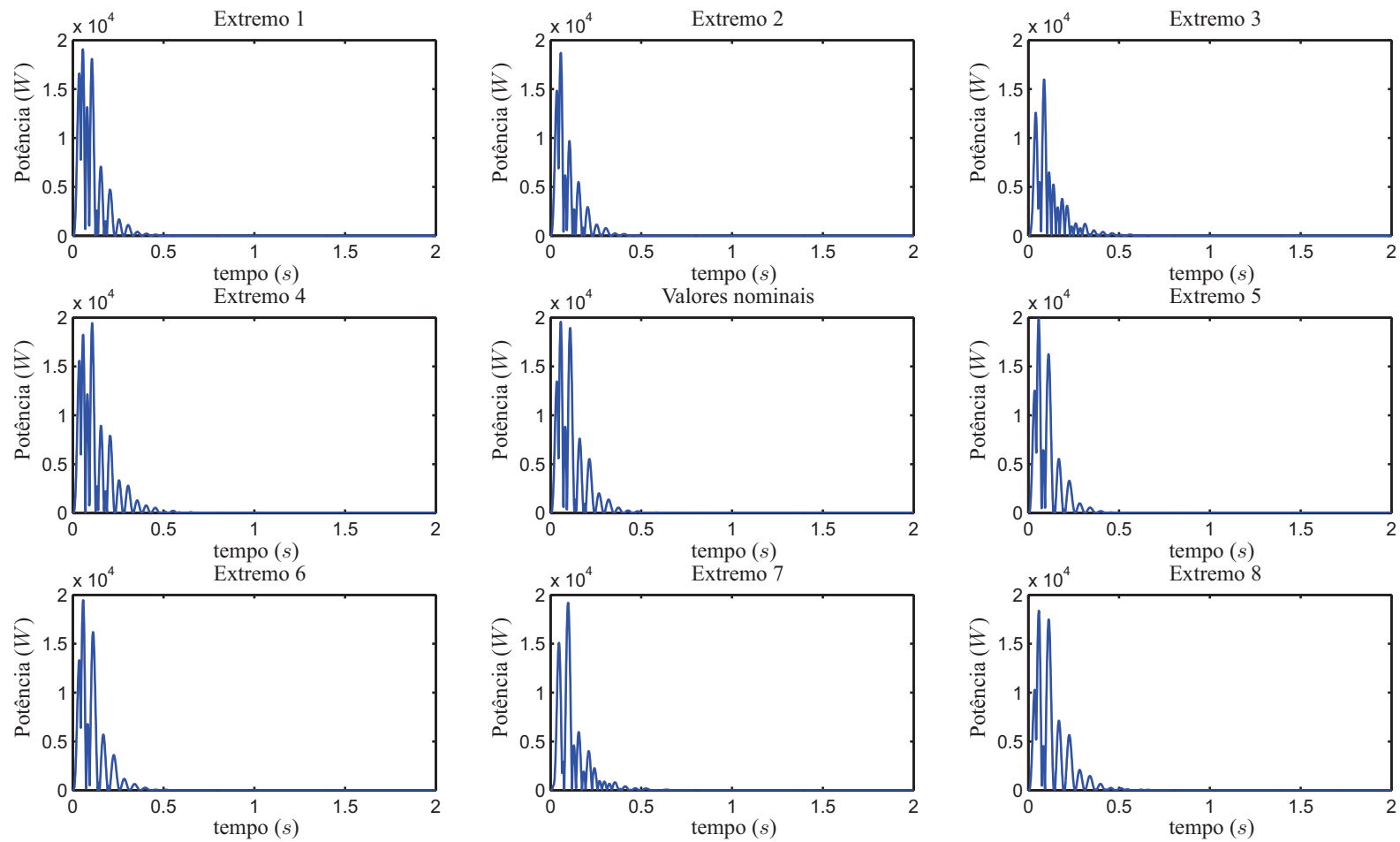


Figura 4.18: Potência necessária na suspensão traseira necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

O controlador obtido possui a mesma ordem do controlador obtido na seção anterior (ordem 13). Suas matrizes de estado são:

$$A_c = \begin{bmatrix} -0,9642 & -18,99 & 9,561 & -4,953 & -10,41 & -1,028 & -1,312 & 1,29 & -10,77 & -13,54 & -10,88 & -0,2463 & -0,3011 \\ -0,0845 & -333,1 & 567,9 & 467,8 & 309,8 & -40,43 & 74,04 & -23,11 & 198,6 & -31,25 & 32,04 & -0,4434 & -1,639 \\ 0,472 & -105,5 & -15,86 & -275,4 & -42,03 & -31,57 & -111,8 & -206,4 & -182,5 & -144,4 & -70,76 & 6,516 & 3,829 \\ 0,4218 & -31,71 & -41,68 & -330,4 & -13,74 & -29,71 & -120,9 & -211,2 & -200,3 & -143,7 & -75,31 & 5,97 & 4,249 \\ -0,02249 & 336,9 & -497,2 & -532 & -318,1 & 43,77 & -66,07 & 40,23 & -182,2 & 49,96 & -24,58 & -0,9862 & 1,46 \\ 0,05171 & -137,3 & 157,8 & -92,63 & 46,31 & -58,83 & -45,18 & -131,8 & -84,44 & -112,4 & -53,61 & 3,881 & 2,47 \\ 0,08766 & 41,87 & -86,57 & -188,7 & -74,8 & -25,84 & -73,14 & -54,07 & -98,65 & -39,01 & -32,15 & 1,774 & 1,592 \\ -0,2213 & 235,2 & -302 & -141,5 & -172,7 & 44,03 & 22,39 & 127,8 & -6,113 & 107,7 & 24,48 & -3,808 & -1,222 \\ -0,04003 & 53,3 & -52,99 & 65,21 & -9,195 & 14,74 & 34,05 & 58,21 & 43,82 & 50,44 & 22,76 & -1,809 & -1,15 \\ 0,05269 & -64,01 & 72,58 & -22,53 & 29,91 & -15,55 & -25,34 & -59,88 & -26,36 & -46,78 & -10,29 & 1,678 & 0,8302 \\ -0,1151 & 149,1 & -198,3 & -87,45 & -105,8 & 26,65 & 10,6 & 75,93 & -20,52 & 48,6 & 9,354 & -1,664 & -0,6796 \\ -0,7338 & -135,4 & 305,6 & -261,8 & -91,03 & -2,647 & 2,186 & -47,05 & 158,7 & 177,1 & 104,4 & -12,97 & 2,089 \\ -0,4283 & -31,79 & 85,13 & -73,58 & -17,44 & -1,408 & -1,044 & -19,56 & 48,76 & 54,49 & 34,69 & -8,246 & 0,1248 \end{bmatrix} ; \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
B_c = & \begin{bmatrix} -400, 4 \\ 5128 \\ -1, 33.10^8 \\ -1, 38.10^8 \\ 6554 \\ 1.03.10^4 \\ -6922 \\ 8, 28.10^7 \\ -6, 84.10^7 \\ 4, 72.10^7 \\ 6, 63.10^7 \\ 898, 7 \\ 32, 9 \end{bmatrix} ; \\
& (4.16) \\
C_c = & \begin{bmatrix} 0, 0002459 & -0, 6183 & 0, 5982 & -1, 162 & -0, 0496 & -0, 2088 & -0, 5336 & -0, 854 & -0, 7776 & -0, 7221 & -0, 4025 & 0, 02399 & 0, 0192 \\ 0, 0002459 & -0, 6183 & 0, 5982 & -1, 162 & -0, 0496 & -0, 2088 & -0, 5336 & -0, 854 & -0, 7776 & -0, 7221 & -0, 4025 & 0, 02399 & 0, 0192 \end{bmatrix} ; \\
& (4.17)
\end{aligned}$$

A Tabela 4.11 apresenta os valores das normas H_∞ da função de transferência entre o distúrbio (irregularidade da pista) para os extremos associados a cada parâmetro incerto, calculada da maneira apresentada na equação (4.7).

Tabela 4.11: Valores das normas H_∞ de cada critério de desempenho - modelo de 4 graus de liberdade.

Desempenho	$\ P_{zw}\ _\infty$	$\ T_{zw}\ _\infty$	Δ_{zw}
Aceleração vertical do veículo no Extremo 1	273,0588	996,8137	265,05
Aceleração vertical do veículo no Extremo 2	375,5133	2331,777	520,96
Aceleração vertical do veículo no Extremo 3	293,2620	972,2152	231,52
Aceleração vertical do veículo no Extremo 4	392,8515	739,7756	88,31
Aceleração vertical do veículo no Extremo 5	205,7424	1127,881	448,20
Aceleração vertical do veículo no Extremo 6	277,4489	2238,021	706,64
Aceleração vertical do veículo no Extremo 7	223,2973	879,1715	293,72
Aceleração vertical do veículo no Extremo 8	299,6887	747,4173	149,40
Aceleração vertical do veículo para Valores Nominais	286,1732	4646,42	1523,64
Deslocamento relativo da roda no Extremo 1	13,3586	31,0580	132,49
Deslocamento relativo da roda no Extremo 2	12,0845	52,7988	336,91
Deslocamento relativo da roda no Extremo 3	17,9979	30,5437	69,71
Deslocamento relativo da roda no Extremo 4	15,9904	18,4246	15,22
Deslocamento relativo da roda no Extremo 5	14,3602	35,1761	144,96
Deslocamento relativo da roda no Extremo 6	12,4449	47,8892	284,81
Deslocamento relativo da roda no Extremo 7	19,3935	27,7561	43,12
Deslocamento relativo da roda no Extremo 8	16,5838	20,8283	25,59
Deslocamento relativo da roda para Valores Nominais	15,4889	120,5271	678,15

Verificando os valores da Tabela 4.11, conclui-se que o controlador não reduz os valores das normas H_∞ relacionadas ao deslocamento relativo da roda e à aceleração vertical do veículo. Entretanto, o comportamento da norma H_∞ relacionada à aceleração vertical do veículo é reduzida na faixa de frequência de 4 a 8 Hz, como mostrado na Figura 4.19. Isso acontece pois as funções

de ponderação utilizadas priorizam a redução da norma na faixa de frequência recomendada pela norma ISO 2631.

Comparando a resposta em frequência do deslocamento das rodas em relação ao solo dos sistemas com controlador e sem controlador, foi possível verificar que o controlador não reduz o pico da resposta em frequência. A resposta em frequência é reduzida apenas entre as frequências de 1 a 11 Hz, aproximadamente, como ilustrado na Figura 4.20.

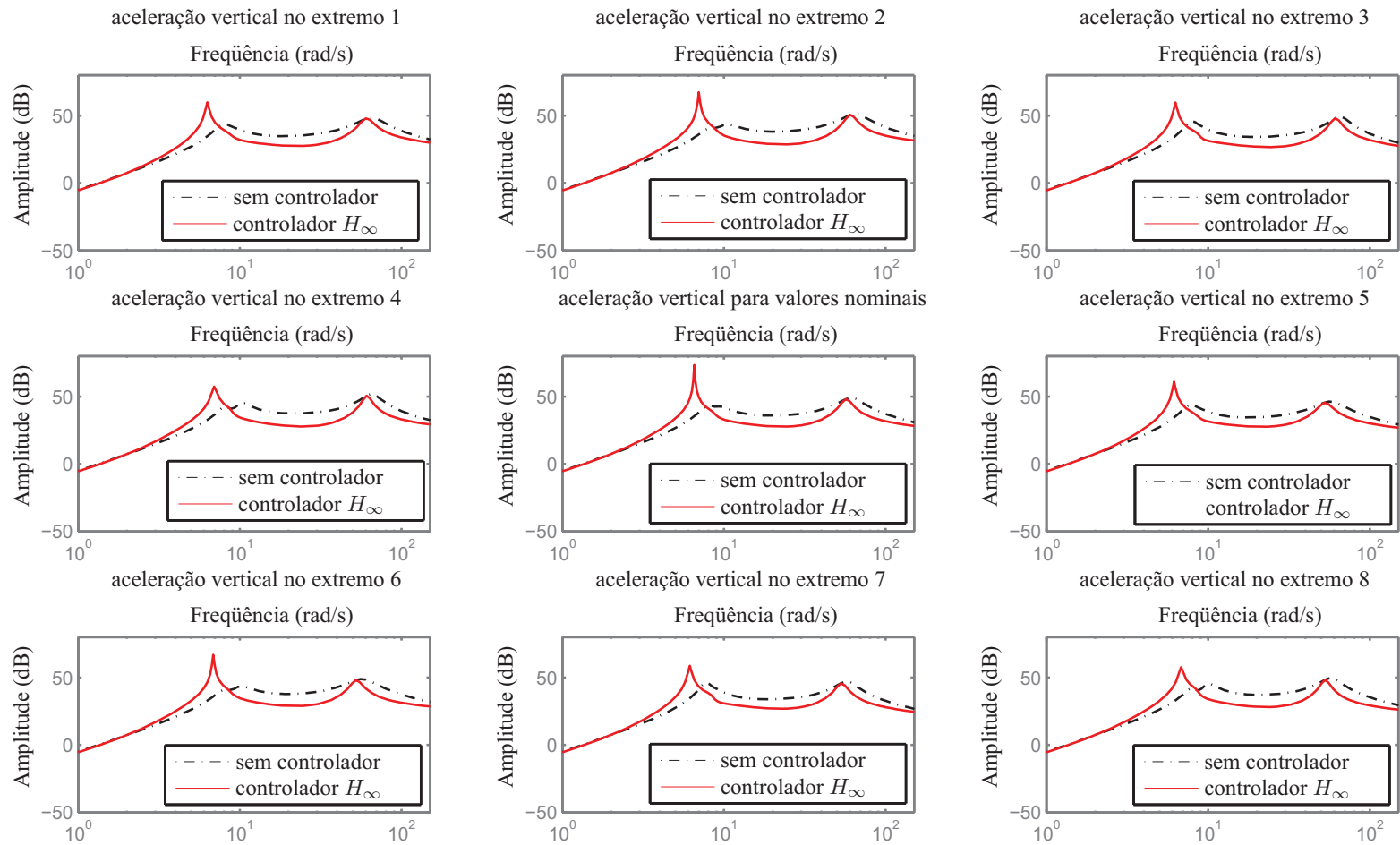


Figura 4.19: Resposta em frequência (aceleração) do sistema sem controlador e com controlador H_∞ projetado.

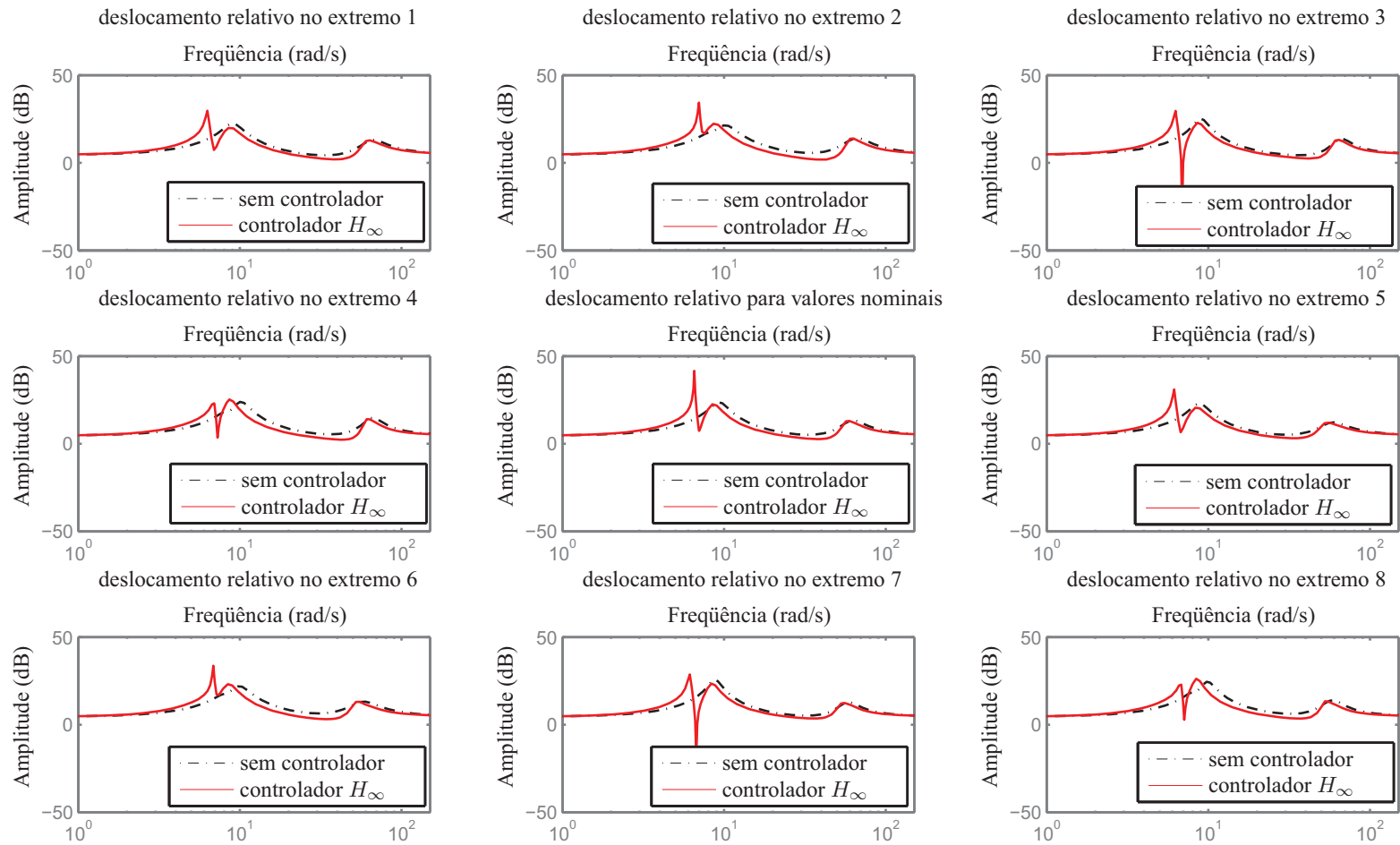


Figura 4.20: Resposta em frequência do sistema (deslocamento relativo da roda) sem controlador e com controlador H_∞ projetado.

A Figura 4.21 representa o comportamento da aceleração vertical do veículo após o mesmo passar pelo mesmo obstáculo definido no início deste capítulo. Nota-se que a redução da aceleração vertical do veículo ao longo do tempo foi menor que a redução ilustrada pela Figura 4.13.

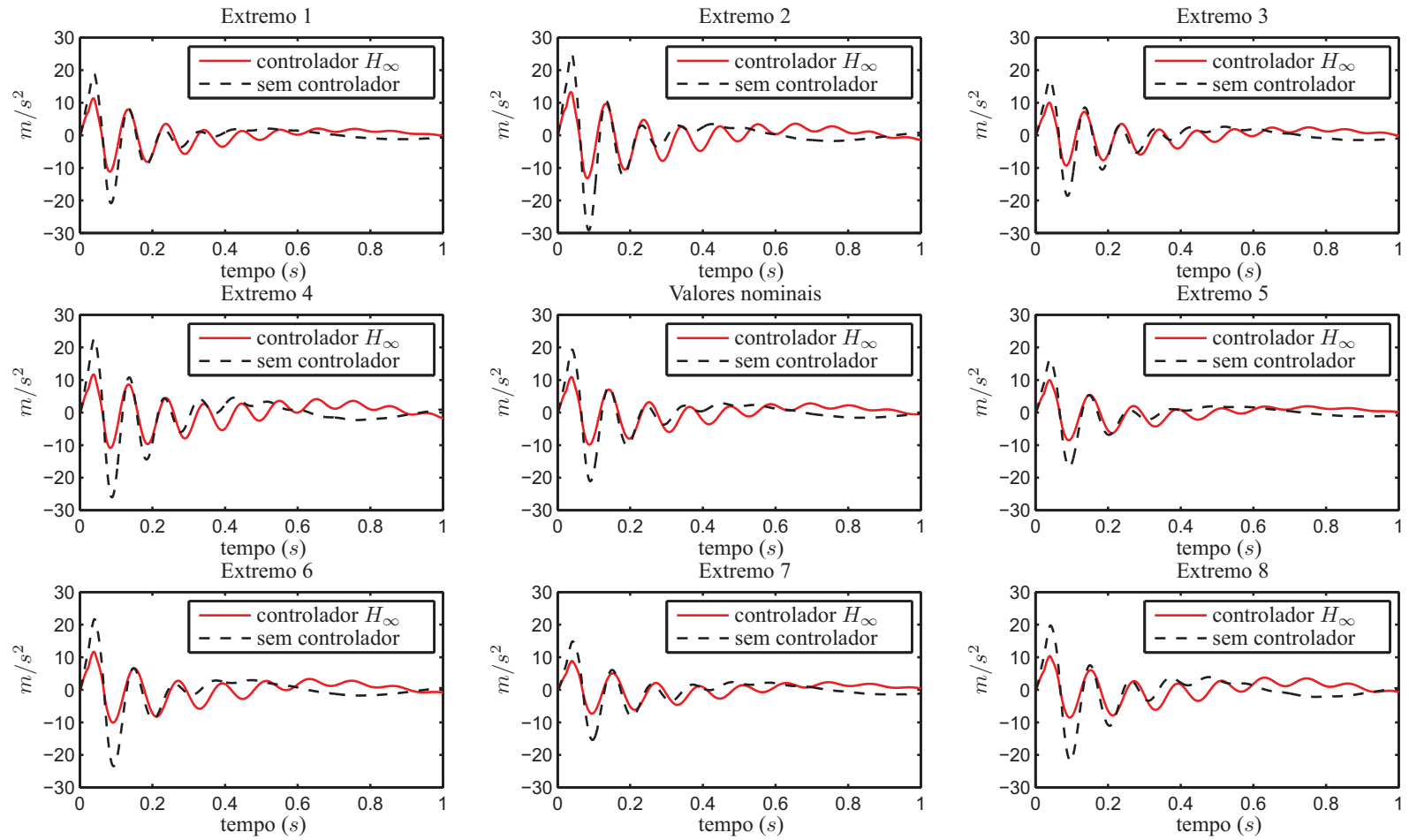


Figura 4.21: Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.12 mostra o tempo de estabilização à 5%, calculado da maneira como mostrada na seção 4.1.1, dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. A forma desta comparação é mostrada pela equação (4.2). O tempo de estabilização do sistema com controle foi maior em todos os extremos.

Tabela 4.12: Tempo de estabilização a 5% da aceleração vertical do veículo

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	0,94	1,94	105,55
2	0,81	1,88	131,97
3	1,31	1,99	51,85
4	1,14	1,97	73,33
5	1,00	1,98	97,54
6	0,86	1,99	130,18
7	1,38	2,31	67,23
8	1,20	1,98	65,26
Nominal	0,93	1,96	109,73

A Tabela 4.13 mostra o valor do maior pico da aceleração vertical dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. Esta é feita de acordo com a equação (4.3). Com essa tabela é possível concluir que, apesar do aumento do tempo de estabilização nos extremos, o valor do maior pico do sistema com controle é até 49% menor que o maior pico do sistema sem controle em todos os extremos.

A Figura 4.22 representa o comportamento do deslocamento relativo entre as rodas e a pista ao passar pelo obstáculo.

Tabela 4.13: Máximo valor da aceleração vertical do veículo

Extremo	$p_{sc} (m/s^2)$	$p_{cc} (m/s^2)$	$\Delta_m (\%)$
1	18,8792	11,3413	-39,92
2	25,0183	13,2726	-46,94
3	17,0975	10,0266	-41,35
4	22,7282	11,6975	-48,53
5	16,3585	9,9480	-39,18
6	21,6718	11,6606	-46,19
7	14,8715	8,8375	-40,57
8	19,7717	10,3263	-47,77
Nominal	19,3316	10,9069	-43,57

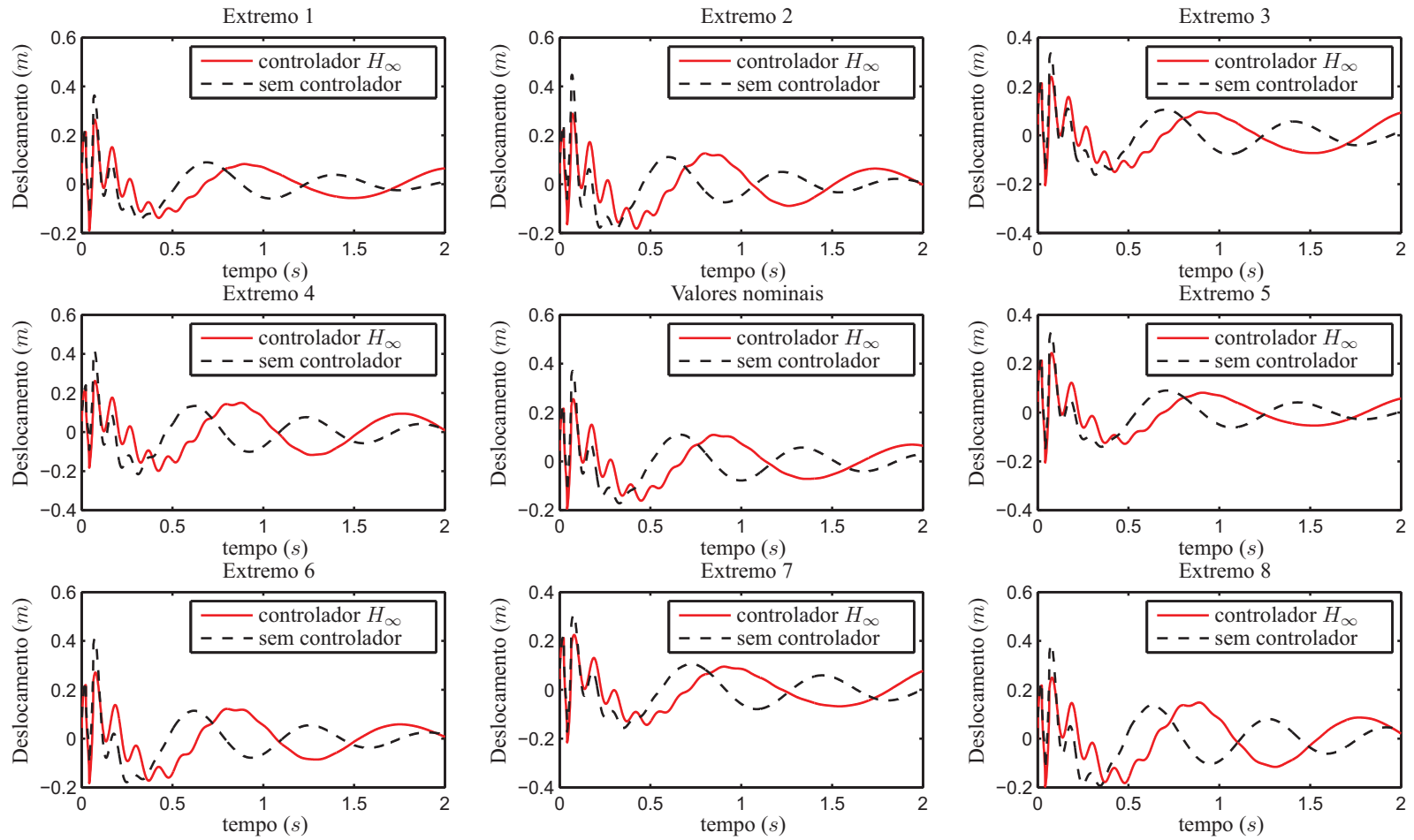


Figura 4.22: Deslocamento relativo das rodas após aplicar um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.14 mostra o tempo de estabilização à 5%, calculado da maneira como mostrada na seção 4.1.1, dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores para o deslocamento relativo das rodas. A forma desta comparação é mostrada pela equação (4.2). Nota-se não houve redução no tempo de estabilização em todos os casos.

Tabela 4.14: Tempo de estabilização a 5% do deslocamento relativo das rodas.

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	1,8314	2,2246	21,46
2	1,6253	1,9547	20,26
3	1,8906	2,3238	22,91
4	1,9723	1,9929	1,04
5	1,9721	2,4177	22,59
6	1,9486	1,9801	1,61
7	1,9233	2,2766	18,37
8	1,9369	2,3133	19,43
Nominal	1,9294	2,3256	20,53

A Tabela 4.15 mostra o valor do maior pico deslocamento relativo das rodas dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. Esta é feita de acordo com a equação (4.3). Nota-se que, além da redução do tempo de estabilização, o maior valor da resposta temporal também foi reduzido em todos os extremos em até 37%.

Tabela 4.15: Máximo valor do deslocamento relativo das rodas

Extremo	$m_{sc} (m)$	$m_{cc} (m)$	$\Delta_m (\%)$
1	0,3632	0,2639	-27,34
2	0,4478	0,2883	-35,61
3	0,3355	0,2394	-28,64
4	0,4160	0,2615	-37,13
5	0,3281	0,2439	-25,66
6	0,4085	0,2709	-33,68
7	0,3079	0,2205	-28,38
8	0,3849	0,2498	-35,10
8	0,3704	0,2552	-31,10

4.3 Modelo com 7 graus de liberdade

4.3.1 Aplicação das funções de ponderações no modelo

Na seção 3.4 são apresentadas as matrizes de estados do sistema, os parâmetros de desempenho e os sinais de controle. As funções de ponderação utilizadas neste trabalho foram mostradas na seção 3.5 e aplicadas na aceleração vertical do veículo, no deslocamento relativo das rodas e no esforço de controle.

Na resposta em frequência, o modelo de 7 graus de liberdade possui 7 picos de amplitudes. Entretanto, para este modelo, os valores das amplitudes de quatro picos ficaram muito próximos aos valores de dois picos, e apenas um dos sete picos possuiu valor distinto. Portanto, fica difícil visualizar os sete picos nas Figuras 4.23 e 4.24.

Na Figura 4.23 são mostradas as 9 possíveis respostas em frequência da aceleração vertical do sistema sem controle (8 delas representam os extremos gerados pelas incertezas e a outra representa o sistema com valores nominais) quando sujeitas à excitação da pista e a função W_{a1} é mostrada no sentido de ilustrar a região de frequência de maior interesse. Salienta-se que a função de ponderação é usada apenas na fase de projeto do controlador, ou seja, na respectiva solução do problema de

otimização.

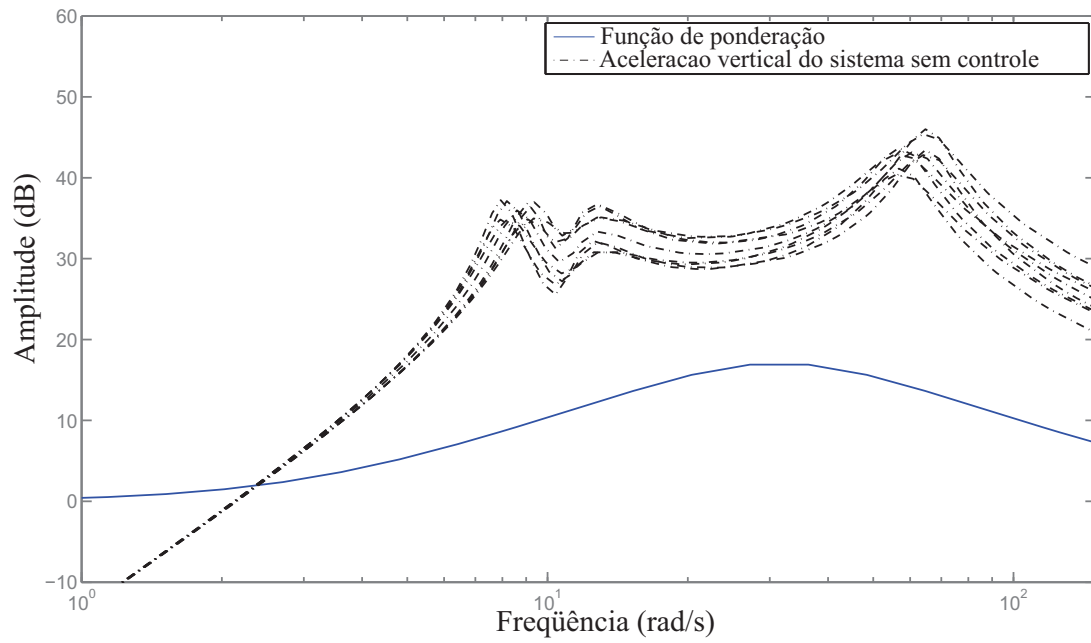


Figura 4.23: 9 possíveis respostas em frequência da aceleração vertical do veículo do sistema sem controle e função de ponderação W_{a1} usada para a aceleração.

Da Figura 4.23, verifica-se que a função W_{a1} pondera com maior intensidade a faixa de frequência de 4 a 8 Hz (20 a 25 rad/s) e, conforme se afasta dela, a ponderação é diminuída. Da mesma forma que nos modelos de 2 e 4 graus de liberdade, espera-se que, ao aplicar esta função de ponderação, a aceleração vertical do veículo seja reduzida nesta faixa de frequência.

Na Figura 4.24 são mostradas as 9 possíveis respostas em frequência do deslocamento relativo da roda do sistema sem controle (8 delas representam os extremos gerados pelas incertezas e a outra representa o sistema com valores nominais) quando sujeitas à excitação da pista e a função W_{khp_i} aplicada.

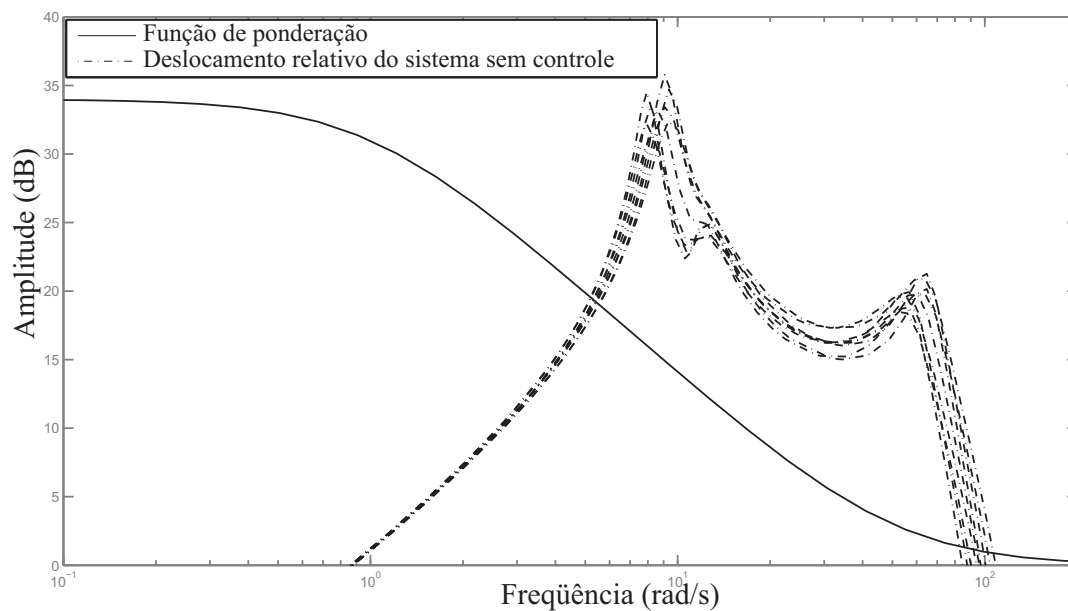


Figura 4.24: 9 possíveis respostas em frequência do deslocamento relativo da roda do sistema sem controle e função de ponderação W_{khp_i} relacionada ao deslocamento relativo da roda.

Da Figura 4.24, verifica-se que a função de ponderação W_{khp_i} pondera com maior intensidade a baixa frequência e com menor intensidade a alta frequência, procurando fazer com que as funções de transferência de malha fechada apresentem um comportamento pré-definido.

4.3.2 Resultados obtidos da análise com incertezas no modelo

Com as informações disponíveis na seção 3.6 foi possível projetar um controlador H_∞ . Como descrito anteriormente, deseja-se que o controlador H_∞ tenha bom desempenho para toda a região do envelope convexo associado às variações dos parâmetros devido às incertezas.

Na simulação do modelo de 7 graus de liberdade foi utilizado o pacote *Yalmip*, com o solver *SeDuMi*. Foi utilizado $shift = 10^{-6}$. As variáveis foram definidas pela função *sdpvar* do *Yalmip toolbox*, e o problema de otimização resolvido pela função *solvesdp*. As inequações e restrições do problema foram definidas pela função *set* deste mesmo pacote. O tempo para solução do problema de otimização foi de 115 segundos em um computador com processador *Core(TM)2 Duo CPU T7250* de 2.00GHz, com 2 GB de memória RAM. Foram realizadas 35 iterações até obter os resultados aqui reportados.

O controlador obtido leva em conta as matrizes de estado (que possuem ordem 14) e a aplicação das funções de ponderação W_{a1} , $W_{\dot{\theta}}$ e $W_{\ddot{\varphi}}$ (que possuem ordem 2) e W_{khipi} (que possui ordem 1). Somando a ordem da matriz e das funções de ponderação, é possível obter a ordem do controlador (ordem 21).

As matrizes de estado do controlador obtido neste caso são:

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{K1} & A_{K2} \end{bmatrix}; \quad (4.18)$$

$$A_{K1} = \begin{bmatrix} -1,239 & 26,23 & 9,683 & -130,8 & -233,6 & -129,2 & 152,5 & -215,5 & 218,3 & -48,18 & 45,31 \\ 1,942 & -148,2 & -33,47 & 438,6 & 162,6 & 59,49 & -610,6 & 622,5 & -1110 & 119,9 & -224,8 \\ 1,1 & -98,35 & -70,39 & 410 & -17,83 & 189,6 & -327,8 & 422,7 & -751,1 & 53,59 & -151,3 \\ -0,2783 & 27,11 & 70,75 & -627,5 & 549,4 & -552,8 & -33,96 & -282,7 & 559,1 & 54,43 & 109,5 \\ 3,159 & -270,3 & -163,9 & 1313 & -24,98 & 569,2 & -1195 & 1475 & -2639 & 207,3 & -526,1 \\ -4,456 & 375 & 211,1 & -1732 & -97,37 & -627,3 & 1748 & -1996 & 3574 & -308,1 & 713 \\ -1,399 & 115,8 & 145,8 & -1296 & 605,8 & -1056 & 304,3 & -858,7 & 1541 & 7,374 & 305,4 \\ 1,515 & -103,1 & -46,11 & 291,7 & -2,11 & -54,62 & -472,6 & 440,2 & -899,6 & 84 & -181,8 \\ -0,8579 & 71,26 & 16,77 & -186 & -380,6 & 0,2536 & 435,2 & -406,9 & 542,1 & -110,8 & 110,6 \\ -5,233 & 319,3 & 140,3 & -881,8 & -67,27 & 152,1 & 1461 & -1373 & 2800 & -265,4 & 568 \\ 3,591 & -297,8 & -88,8 & 590,8 & 762,8 & -328,6 & -1585 & 1336 & -2370 & 345,2 & -476,9 \\ 0,02996 & -0,03651 & -0,01527 & 0,1762 & 0,2162 & 0,1305 & -0,2014 & 0,2597 & -0,3148 & 0,05442 & -0,0647 \\ -0,04334 & -0,02781 & -0,01629 & 0,1683 & 0,093 & 0,1207 & -0,1369 & 0,1945 & -0,2657 & 0,03156 & -0,0542 \\ 0,04482 & -0,03419 & -0,01324 & 0,1467 & 0,2037 & 0,1051 & -0,1871 & 0,2353 & -0,289 & 0,05131 & -0,05932 \\ -0,04407 & -0,03972 & -0,02185 & 0,2189 & 0,1387 & 0,1532 & -0,1945 & 0,2696 & -0,3726 & 0,04595 & -0,07601 \\ -0,002008 & 0,0001006 & 1,97E-05 & -0,01636 & -0,02876 & -0,02214 & 0,008563 & -0,01623 & -3,51E-05 & -0,003701 & 0,0001357 \\ -0,0008372 & 0,004585 & 0,001804 & -0,04439 & -0,06552 & -0,045 & 0,03722 & -0,05362 & 0,03855 & -0,01172 & 0,008262 \\ -0,8823 & -8,61 & -8,036 & -1828 & -3523 & -2716 & 840,9 & -1884 & -85,54 & -422,8 & 15,67 \\ -0,5886 & -12,56 & -7,547 & -1251 & -2301 & -1802 & 561,2 & -1220 & -113,8 & -273,3 & -1,278 \\ -0,02157 & 0,7951 & 0,4824 & 76,52 & 142,4 & 111,3 & -34,15 & 75,25 & 7,197 & 16,87 & 0,1081 \\ -0,06917 & -0,1758 & -0,2825 & -83,44 & -161,2 & -123,8 & 39,05 & -86,9 & -2,071 & -19,5 & 1,084 \end{bmatrix}; \quad (4.19)$$

$$A_{K2} = \begin{bmatrix} 141,3 & -115,9 & 132,8 & -197,1 & 1,722 & -4,683 & -16,75 & 0,1003 & -0,02695 & -0,1368 \\ -17,01 & -20,26 & -27,35 & -18,97 & 1,451 & 1,002 & 62,5 & -7,963 & -0,635 & 0,9972 \\ -11,97 & -13,53 & -19,11 & -12,57 & 1,05 & 0,5419 & 40,61 & -5,408 & -0,4259 & 0,6866 \\ 10,36 & 10,14 & 15,74 & 8,429 & -0,6317 & -0,9206 & -23,54 & 4,513 & 0,3477 & -0,5357 \\ -40,76 & -46,72 & -65,2 & -43,56 & 3,596 & 2,026 & 142,8 & -18,23 & -1,507 & 2,377 \\ 54,53 & 63,22 & 87,52 & 59,29 & -4,889 & -2,632 & -195,4 & 24,66 & 2,031 & -3,205 \\ 26,43 & 27,66 & 41,05 & 24,32 & -1,942 & -1,84 & -75,95 & 11,25 & 0,922 & -1,44 \\ -17,4 & -11,77 & -25,94 & -9,203 & 1,573 & -0,2971 & 48,58 & -7,052 & -0,4385 & 0,8033 \\ 4,72 & 12,49 & 10,04 & 14,16 & -0,8798 & -0,07171 & -35,58 & 2,649 & 0,311 & -0,4903 \\ 60,16 & 30,27 & 86,6 & 18,93 & -5,072 & 1,539 & -150,8 & 21,92 & 1,283 & -2,473 \\ -18,05 & -54,53 & -41,14 & -63,01 & 3,914 & -0,1697 & 138,6 & -15,72 & -1,286 & 2,087 \\ -6,227 & 78,28 & 3,161 & -2,428 & 0,9769 & -5,3 & 0,04743 & 0,06262 & 1,308 & -0,3113 \\ -38,54 & 0,8238 & -7,583 & -14,25 & 12,5 & -30,28 & -0,008354 & 0,03319 & 0,5927 & 0,5827 \\ -4,787 & -2,803 & -4,373 & 76,78 & -2,708 & 8,374 & 0,00754 & -0,0468 & -0,9258 & 0,1003 \\ -7,436 & -6,141 & -46,38 & -4,013 & -8,381 & 19,92 & 0,04407 & -0,01581 & -0,2073 & -0,4445 \\ -15,29 & -21,55 & 8,153 & 17,84 & -17,45 & 55,22 & -0,005441 & -0,1326 & -2,574 & -0,3003 \\ -8,782 & -8,786 & 5,203 & 7,702 & -16,25 & 23,81 & 4,72E-05 & -0,06227 & -1,193 & -0,2528 \\ 0,07119 & 9,419 & 5,995 & 14,94 & -2,217 & 4,11 & -66,46 & -16,22 & 0,02352 & -0,3571 \\ 27,92 & -23,87 & 31,92 & -33,45 & -3,135 & 7,532 & -45,49 & -12,29 & -0,339 & -0,2074 \\ -431,1 & -600,5 & 228,4 & 499,5 & -506,9 & 1340 & 2,555 & -2,803 & -69,17 & -6,862 \\ -208,2 & -251,5 & 117,8 & 213,8 & -229,9 & 602,7 & -3,209 & -2,488 & -34,52 & -3,235 \end{bmatrix}; \quad (4.20)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 2,85.10^5 \\ -2,567.10^5 \\ 4157 \\ 5,014.10^6 \\ 9,018.10^5 \\ -2,835.10^6 \\ 6,876.10^6 \\ -8,487.10^6 \\ -4,374.10^6 \\ 4,216.10^7 \\ 8,471.10^6 \\ -134,2 \\ -22,56 \\ -159,1 \\ -70,8 \\ -42,55 \\ 26,24 \\ -4,916.10^4 \\ -2,01.10^4 \\ 1759 \\ -302,7 \end{bmatrix}; \quad (4.21)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} C_{k1} & C_{k2} \end{bmatrix}; \quad (4.22)$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} -0,004347 & 0,2843 & 0,1518 & -1,221 & -0,1636 & -0,3968 & 1,298 & -1,48 & 2,642 & -0,2378 & 0,5339 \\ -0,004347 & 0,2843 & 0,1518 & -1,221 & -0,1636 & -0,3968 & 1,298 & -1,48 & 2,642 & -0,2378 & 0,5339 \\ -0,004347 & 0,2843 & 0,1518 & -1,221 & -0,1636 & -0,3968 & 1,298 & -1,48 & 2,642 & -0,2378 & 0,5339 \\ -0,004347 & 0,2843 & 0,1518 & -1,221 & -0,1636 & -0,3968 & 1,298 & -1,48 & 2,642 & -0,2378 & 0,5339 \end{bmatrix}; \quad (4.23)$$

$$C_{k2} = \begin{bmatrix} 0,04057 & 0,04882 & 0,0653 & 0,04576 & -0,003427 & -0,002538 & -0,1461 & 0,0191 & 0,001527 & -0,002389 \\ 0,04057 & 0,04882 & 0,0653 & 0,04576 & -0,003427 & -0,002538 & -0,1461 & 0,0191 & 0,001527 & -0,002389 \\ 0,04057 & 0,04882 & 0,0653 & 0,04576 & -0,003427 & -0,002538 & -0,1461 & 0,0191 & 0,001527 & -0,002389 \\ 0,04057 & 0,04882 & 0,0653 & 0,04576 & -0,003427 & -0,002538 & -0,1461 & 0,0191 & 0,001527 & -0,002389 \end{bmatrix}; \quad (4.24)$$

Para verificar o desempenho deste controlador, foi avaliado o comportamento do mesmo no controle das 8 plantas dos 8 extremos correspondentes aos modelos incertos, conforme mostrado na Tabela 3.6, e no ponto nominal dado na Tabela 3.3.

A Tabela 4.16 apresenta os valores das normas H_∞ da função de transferência entre o distúrbio (irregularidade da pista) para os extremos associados a cada parâmetro incerto, onde $\|P_{zw}\|_\infty$ representa o maior pico da resposta em frequência do sistema sem controle, $\|T_{zw}\|_\infty$ representa o maior pico da resposta em frequência do sistema com controle e a diferença percentual Δ_{zw} , calculada usando a equação (4.7).

Tabela 4.16: Valores das normas H_∞ de cada critério de desempenho - modelo de 7 graus de liberdade.

Desempenho	$\ P_{zw}\ _\infty$	$\ T_{zw}\ _\infty$	Δ_{zw}
Aceleração vertical do veículo no Extremo 1	137,7412	122,9619	-10,73
Aceleração vertical do veículo no Extremo 2	184,5110	164,1289	-11,05
Aceleração vertical do veículo no Extremo 3	149,1064	122,3047	-17,97
Aceleração vertical do veículo no Extremo 4	200,5213	163,0506	-18,69
Aceleração vertical do veículo no Extremo 5	104,3938	89,0391	-14,71
Aceleração vertical do veículo no Extremo 6	142,7781	118,0138	-17,34
Aceleração vertical do veículo no Extremo 7	113,3876	90,2841	-20,38
Aceleração vertical do veículo no Extremo 8	153,9370	119,5145	-22,36
Aceleração vertical do veículo para Valores Nominais	142,8086	120,6176	-15,54
Deslocamento relativo da roda no Extremo 1	36,5223	18,8606	-48,36
Deslocamento relativo da roda no Extremo 2	42,1637	22,8400	-45,83
Deslocamento relativo da roda no Extremo 3	47,5697	24,3358	-48,84
Deslocamento relativo da roda no Extremo 4	54,0561	24,6931	-54,32
Deslocamento relativo da roda no Extremo 5	41,0630	20,5692	-49,91
Deslocamento relativo da roda no Extremo 6	47,3826	20,4257	-56,89
Deslocamento relativo da roda no Extremo 7	53,9280	26,1821	-51,45
Deslocamento relativo da roda no Extremo 8	61,3501	26,5447	-56,73
Deslocamento relativo da roda para Valores Nominais	45,8712	22,2206	-51,56

Verificando os valores da Tabela 4.16, conclui-se que o controlador reduz de 11% a 22% a norma H_∞ relacionada à aceleração vertical do veículo, e de 46% a 57% a norma H_∞ relacionada ao deslocamento relativo das rodas.

A resposta em frequência da aceleração vertical do veículo é ilustrada na Figura 4.25. É possível verificar que o controlador reduz as acelerações entre as frequências de 4 a 8 Hz. O pico dos valores singulares foi a uma frequência acima dos 8 Hz.

A resposta em frequência do deslocamento relativo das 4 rodas em relação ao solo é ilustrada

na Figura 4.26. É possível verificar que, quando comparado com a resposta em frequência do modelo sem controle, o controlador atua de forma a reduzir o maior pico da resposta em frequência em até 57%.

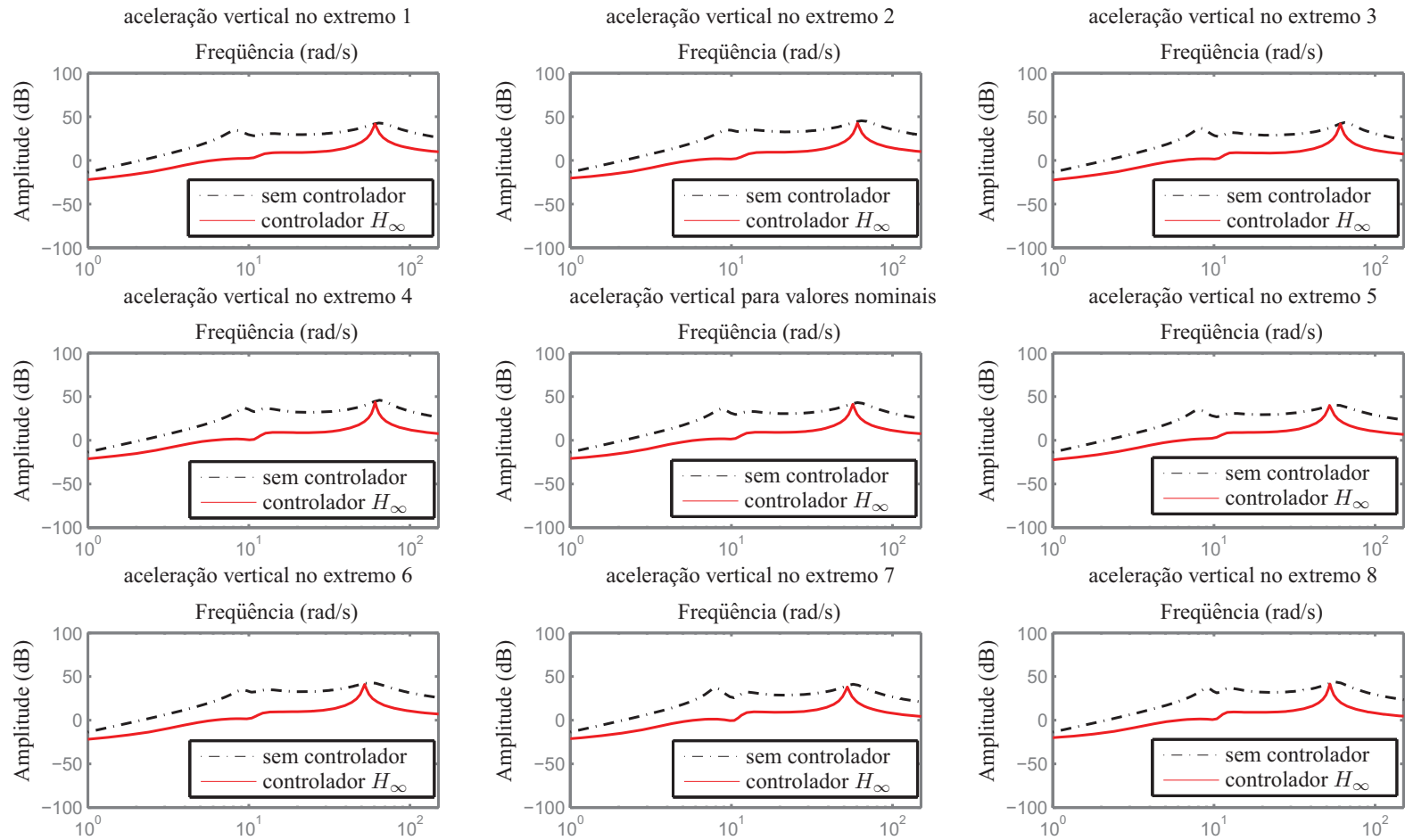


Figura 4.25: Resposta em frequência (aceleração) do modelo de sete graus de liberdade, sem controlador e com controlador H_∞ .

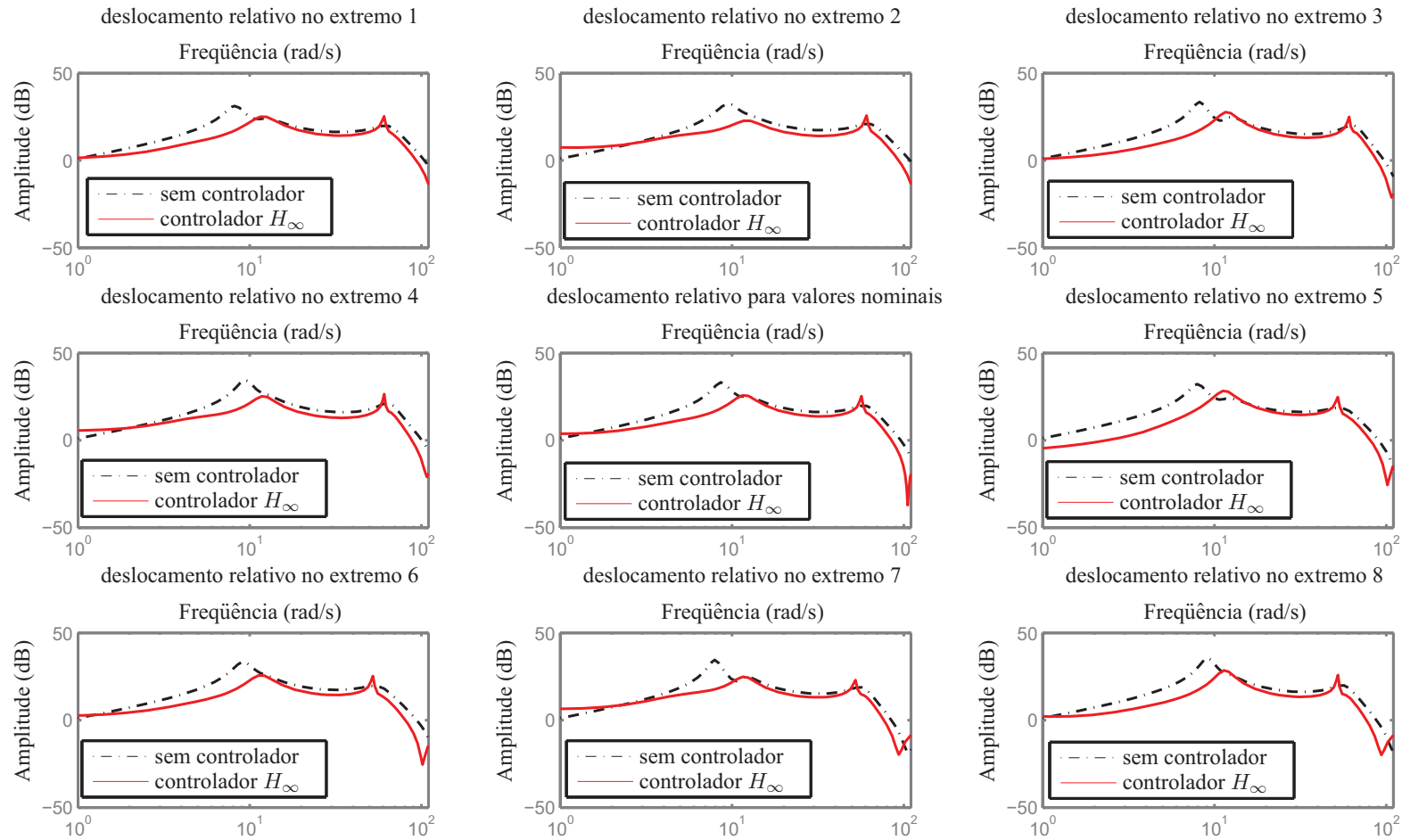


Figura 4.26: Resposta em frequência (deslocamento relativo das 4 rodas) do sistema sem controlador e com controlador H_∞ .

A Figura 4.27 representa o comportamento da aceleração vertical do veículo após o mesmo passar de maneira inclinada pelo obstáculo definido no início deste capítulo, com um ângulo de 70° em relação ao obstáculo. Conclui-se que o controlador reduz a aceleração vertical do veículo.

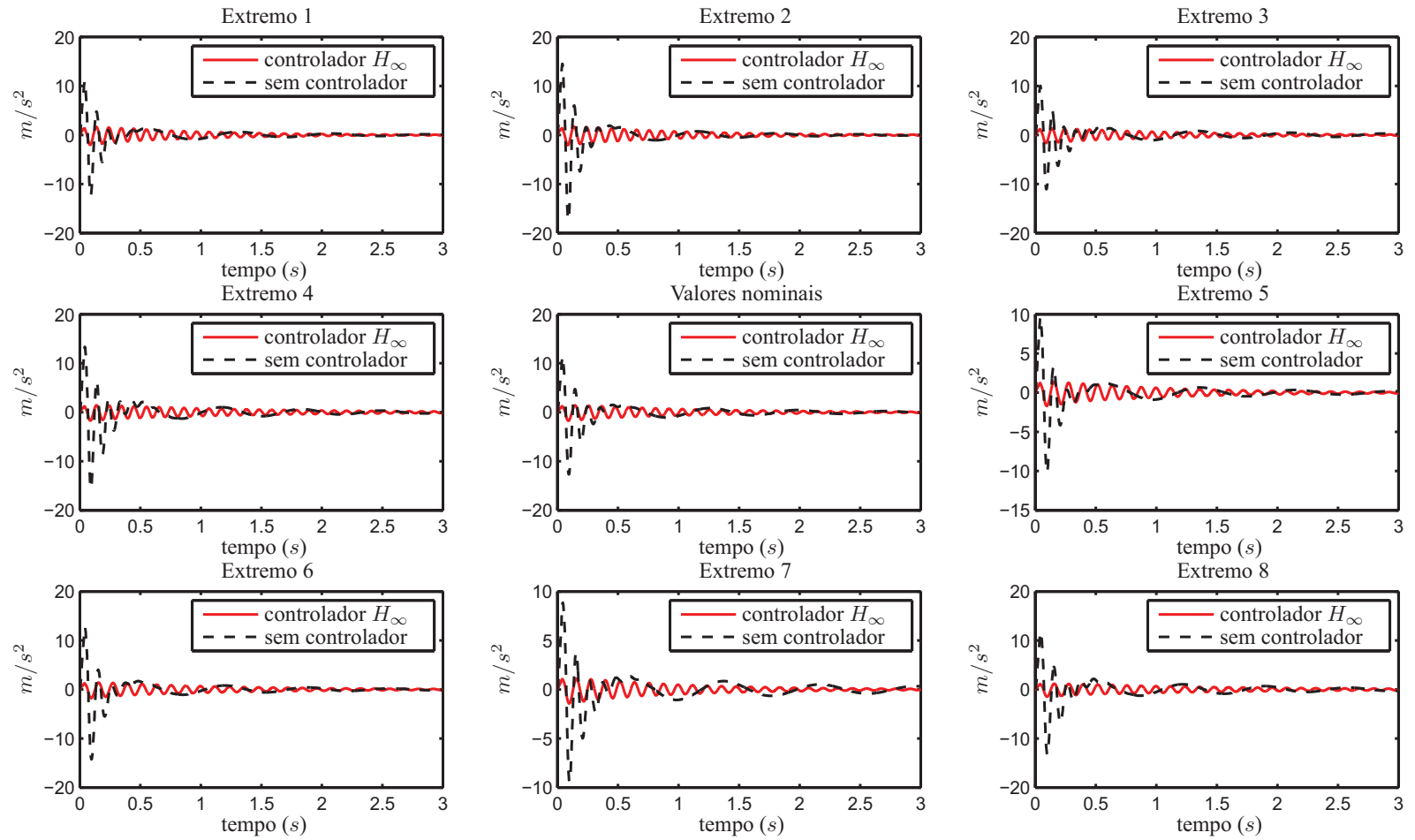


Figura 4.27: Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.17 mostra o tempo de estabilização à 5% dos sistemas sem controle e com controle, calculado da maneira como mostrada na seção 4.1.1, dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. A forma desta comparação é mostrada pela equação (4.2). A partir desta tabela é possível concluir que não há redução do tempo de estabilização em todos os extremos.

Tabela 4.17: Tempo de estabilização a 5% da aceleração vertical do veículo

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	1,34	2,66	99,69
2	0,88	3,00	239,25
3	1,77	2,99	68,70
4	1,54	3,00	95,18
5	1,45	2,63	81,83
6	1,25	3,00	139,46
7	2,22	3,00	34,55
8	1,93	3,00	55,78
Nominal	1,34	2,99	122,04

A Tabela 4.18 mostra o valor do maior pico da aceleração vertical dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. Esta é feita de acordo com a equação (4.3). Com essa tabela é possível concluir que, apesar do aumento do tempo de estabilização em todos os extremos, o valor do maior pico do sistema com controle é até 90% menor que o maior pico do sistema sem controle. Portanto, o controlador projetado pode ser considerado eficiente para melhorar o conforto dos passageiros.

A Figura 4.28 representa o comportamento do deslocamento relativo das 4 rodas e a pista quando o veículo passa pelo obstáculo. Verifica-se que, no sistema com controle, ocorre uma redução dos picos ao longo do tempo.

Tabela 4.18: Máximo valor da aceleração vertical do veículo

Extremo	$p_{sc} (m/s^2)$	$p_{cc} (m/s^2)$	$\Delta_m (\%)$
1	10,9927	1,6683	-84,82
2	14,5415	1,7626	-87,88
3	10,0478	1,3592	-86,47
4	13,3432	1,4275	-89,30
5	9,6367	1,3520	-85,97
6	12,7617	1,1259	-91,18
7	8,8600	1,1059	-87,52
8	11,7592	1,1885	-89,89
Nominal	11,3697	1,4241	-87,47

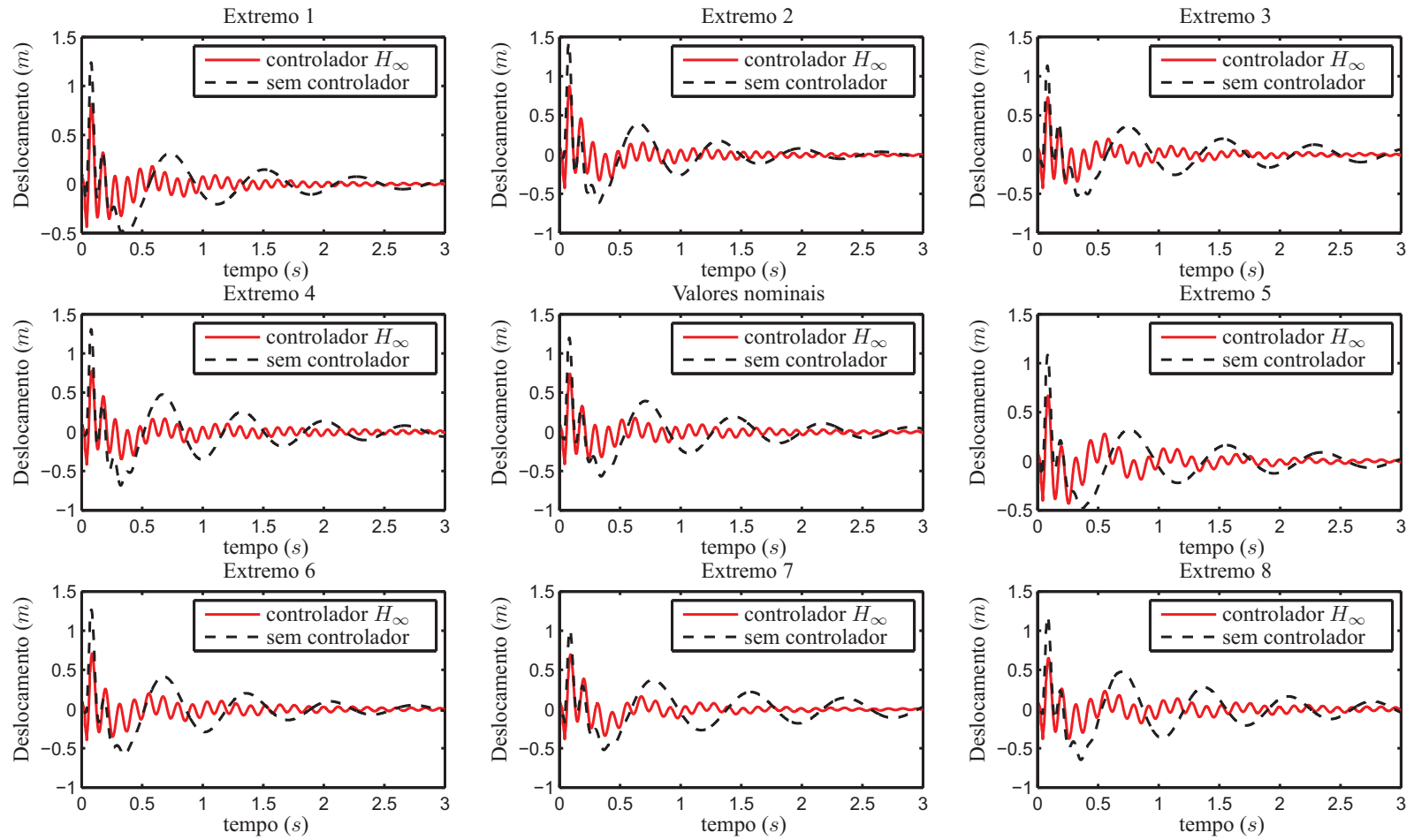


Figura 4.28: Deslocamento relativo das rodas após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.19 mostra o tempo de estabilização à 5%, calculado da maneira como mostrada na seção 4.1.1, dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores para o deslocamento relativo das rodas. A forma desta comparação é mostrada pela equação (4.2). Nota-se uma redução no tempo de estabilização entre 2% e 32%.

Tabela 4.19: Tempo de estabilização a 5% do deslocamento relativo das 4 rodas.

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	2,35	1,63	-30,59
2	2,03	1,99	-2,01
3	2,53	1,99	-21,52
4	2,73	2,50	-8,49
5	2,82	1,94	-31,04
6	2,45	2,24	-8,38
7	2,90	2,24	-22,57
8	2,87	2,55	-11,03
Nominal	2,62	2,02	-22,85

A Tabela 4.20 mostra o valor do maior pico do deslocamento relativo das 4 rodas dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. Esta é feita de acordo com a equação (4.3). Nota-se que, além da redução do tempo de estabilização, o maior valor da resposta temporal também foi reduzido em todos os extremos em até 46%.

A equação (4.25) ilustra o cálculo da potência necessária na roda traseira esquerda:

$$Pot_{te} = |u_{te} (\dot{x}_1 + b\dot{\theta} + r\dot{\varphi})| + |u_{te}\dot{x}_2|, \quad (4.25)$$

onde Pot_{te} é a potência necessária no atuador traseiro esquerdo. A equação (4.26) ilustra o cálculo da potência necessária na roda dianteira esquerda:

$$Pot_{fe} = |u_{fe} (\dot{x}_1 - a\dot{\theta} + r\dot{\varphi})| + |u_{fe}\dot{x}_3|, \quad (4.26)$$

onde Pot_{fe} é a potência necessária no atuador dianteiro esquerdo. A equação (4.27) ilustra o

Tabela 4.20: Máximo valor do pico do deslocamento relativo das 4 rodas

Extremo	$m_{sc} (m)$	$m_{cc} (m)$	$\Delta_m (\%)$
1	1,2396	0,8098	-34,67
2	1,4237	0,8110	-43,04
3	1,1330	0,7314	-35,45
4	1,3083	0,7325	-44,01
5	1,0852	0,7012	-35,39
6	1,2666	0,7046	-44,37
7	1,0104	0,6446	-36,20
8	1,1839	0,6474	-45,32
Nominal	1,1999	0,7252	-39,56

cálculo da potência necessária na roda dianteira direita:

$$Pot_{fd} = \left| u_{fd} (\dot{x}_1 - a\dot{\theta} - r\dot{\varphi}) \right| + |u_{fd}\dot{x}_4|, \quad (4.27)$$

onde Pot_{fd} é a potência necessária no atuador dianteiro direito. A equação (4.28) ilustra o cálculo da potência necessária na roda traseira direita:

$$Pot_{td} = \left| u_{td} (\dot{x}_1 + b\dot{\theta} - r\dot{\varphi}) \right| + |u_{td}\dot{x}_5|, \quad (4.28)$$

onde Pot_{td} é a potência necessária no atuador traseiro direito.

As Figuras 4.29, 4.30, 4.31 e 4.32 ilustram, respectivamente, as potências necessárias nas suspensões traseira esquerda, dianteira esquerda, dianteira direita e traseira direita para controlar o sistema quando sujeito a um distúrbio (obstáculo). É possível verificar que os controladores necessitam de até, aproximadamente, $70kW$ para atenuar a resposta do sistema quando sujeito à lombada. Comparando com o atuador de referência adotado, a capacidade do atuador projetado é maior que a capacidade do atuador de referência adotado. Uma proposta para diminuir a potência necessária será mostrada na seção 4.3.3.

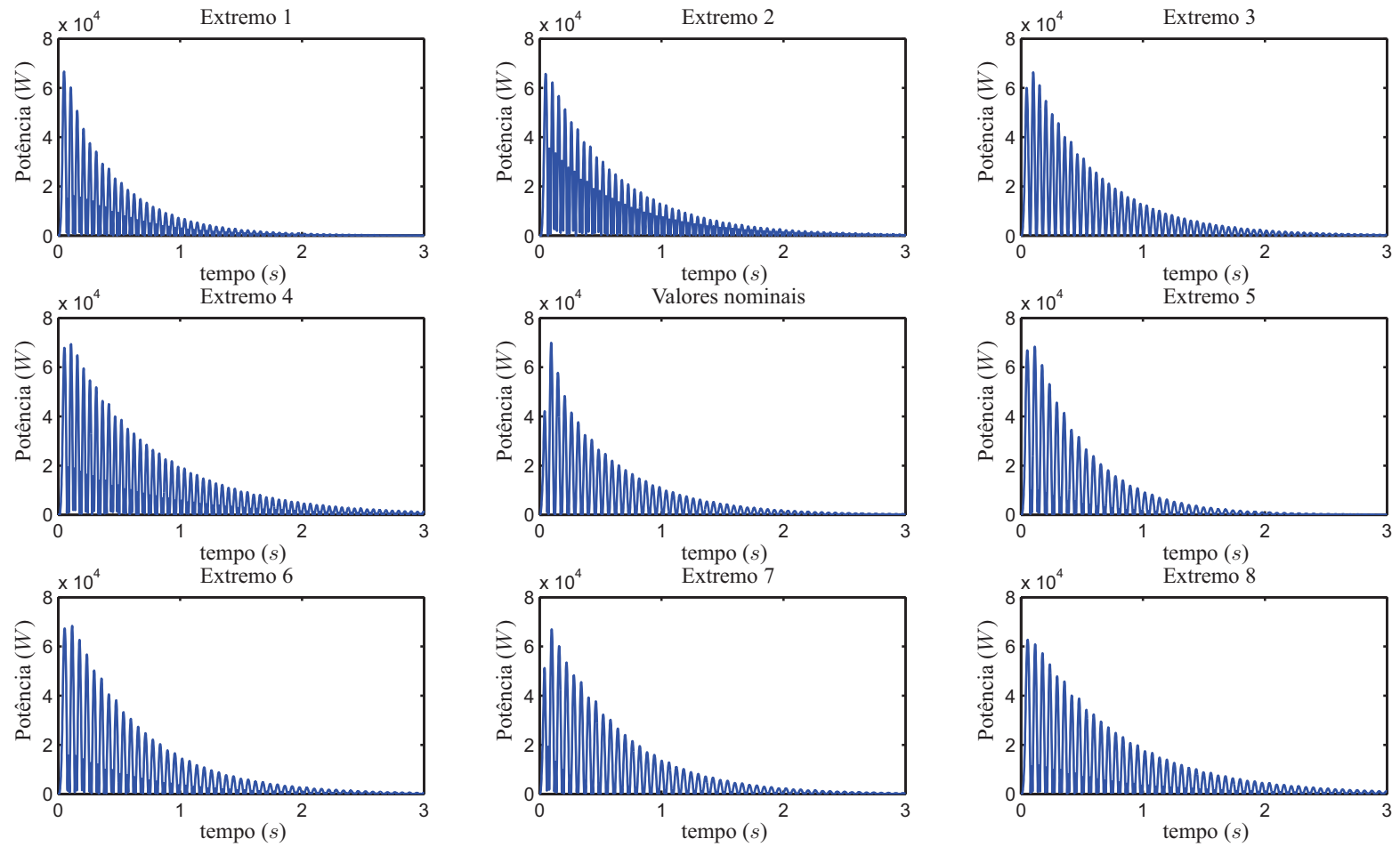


Figura 4.29: Potência necessária para controle da suspensão traseira esquerda necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

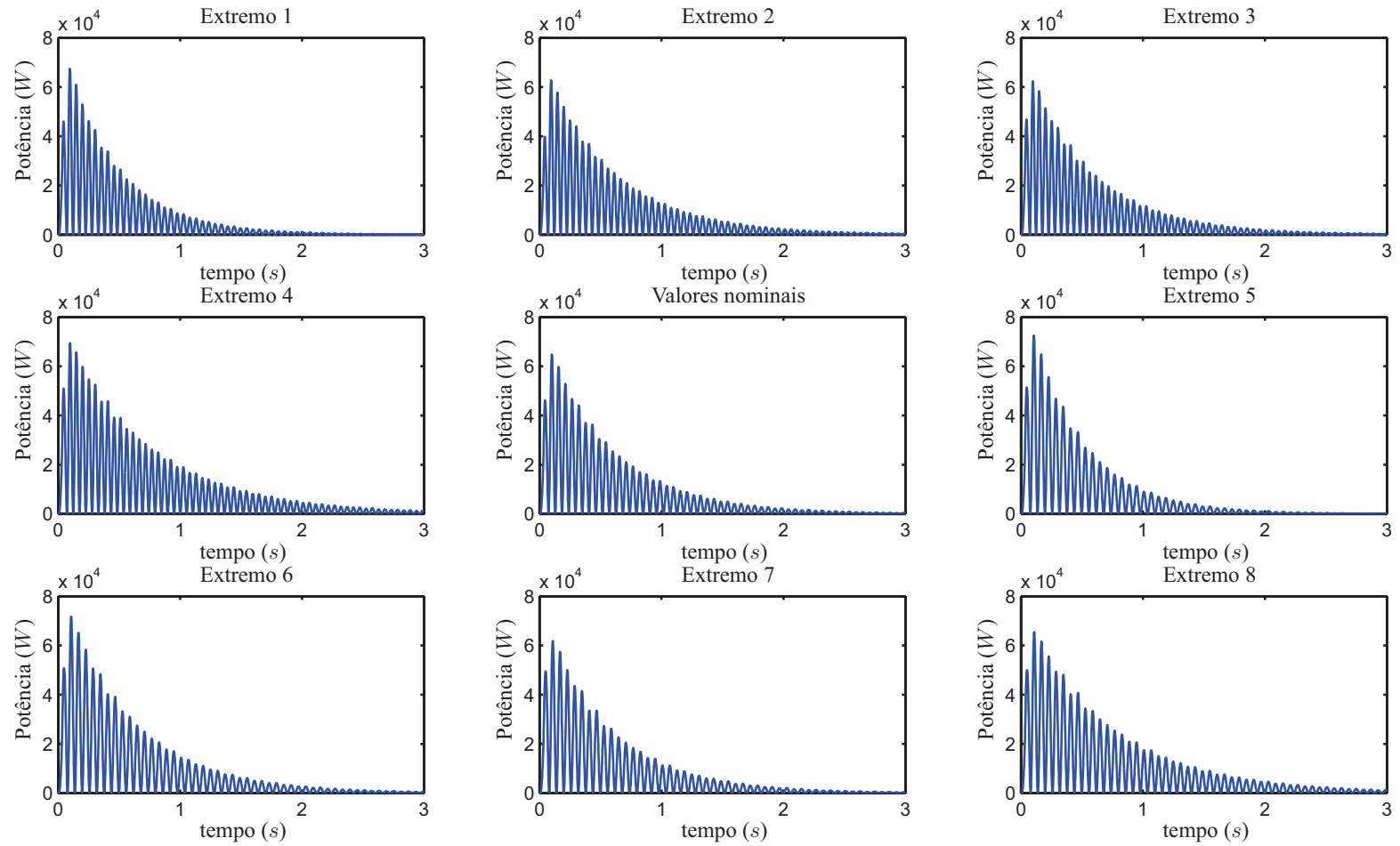


Figura 4.30: Potência necessária para controle da suspensão dianteira esquerda necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

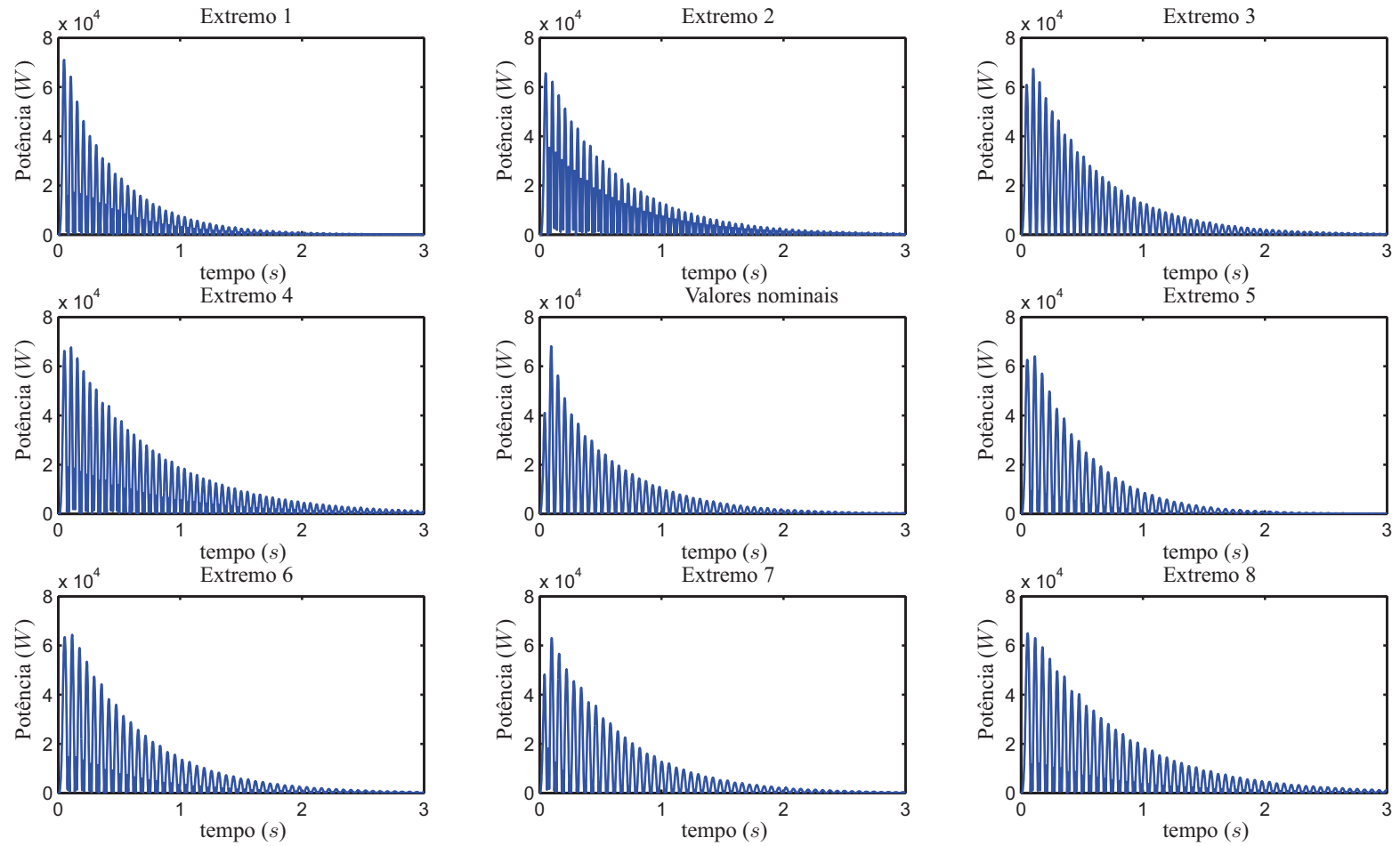


Figura 4.31: Potência necessária para da suspensão dianteira direita necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

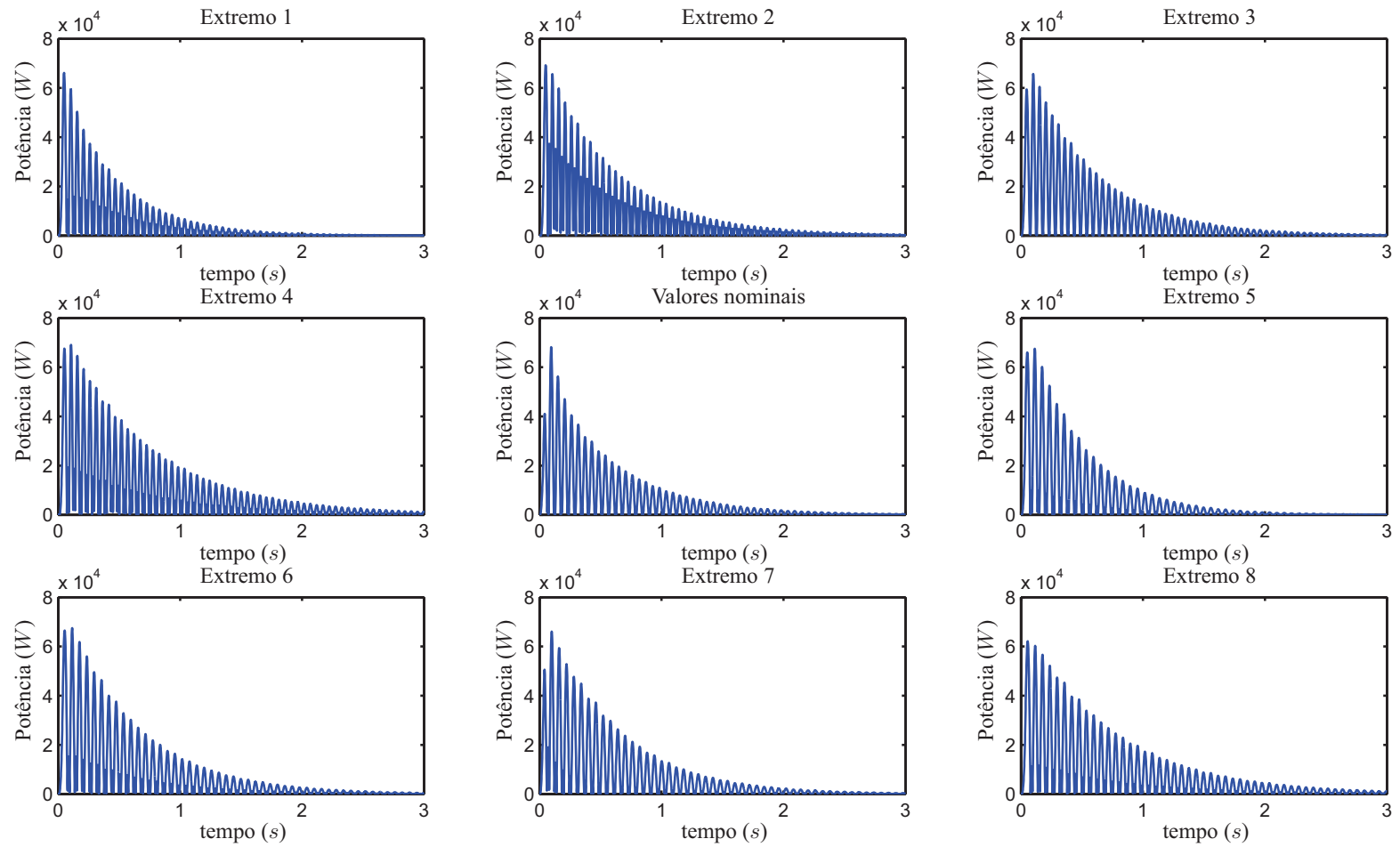


Figura 4.32: Potência necessária para da suspensão traseira direita necessário para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

4.3.3 Reprojetando o controlador limitando a potência necessária em 20 kW

Na seção 4.3.2 foi possível identificar que a potência necessária para controlar as respostas do sistema quando sujeito ao obstáculo foi maior que a potência do atuador de referência adotado. Na tentativa de diminuir essa potência, multiplicou-se a função de ponderação W_u por um fator k_{rp} , como mostra a equação (4.14), aumentando assim a ponderação dada ao esforço de controle.

Após algumas tentativas, foi possível verificar que utilizando $k_{rp} = 10$ a potência necessária para controlar o sistema não ultrapassa os 20 kW quando o sistema está sujeito ao mesmo obstáculo definido na seção anterior. As Figuras 4.33, 4.34, 4.35 e 4.36 ilustram o comportamento da potência quando o veículo passa por este obstáculo. As potências necessárias foram calculadas com base nas equações (4.25), (4.26), (4.27) e (4.28).

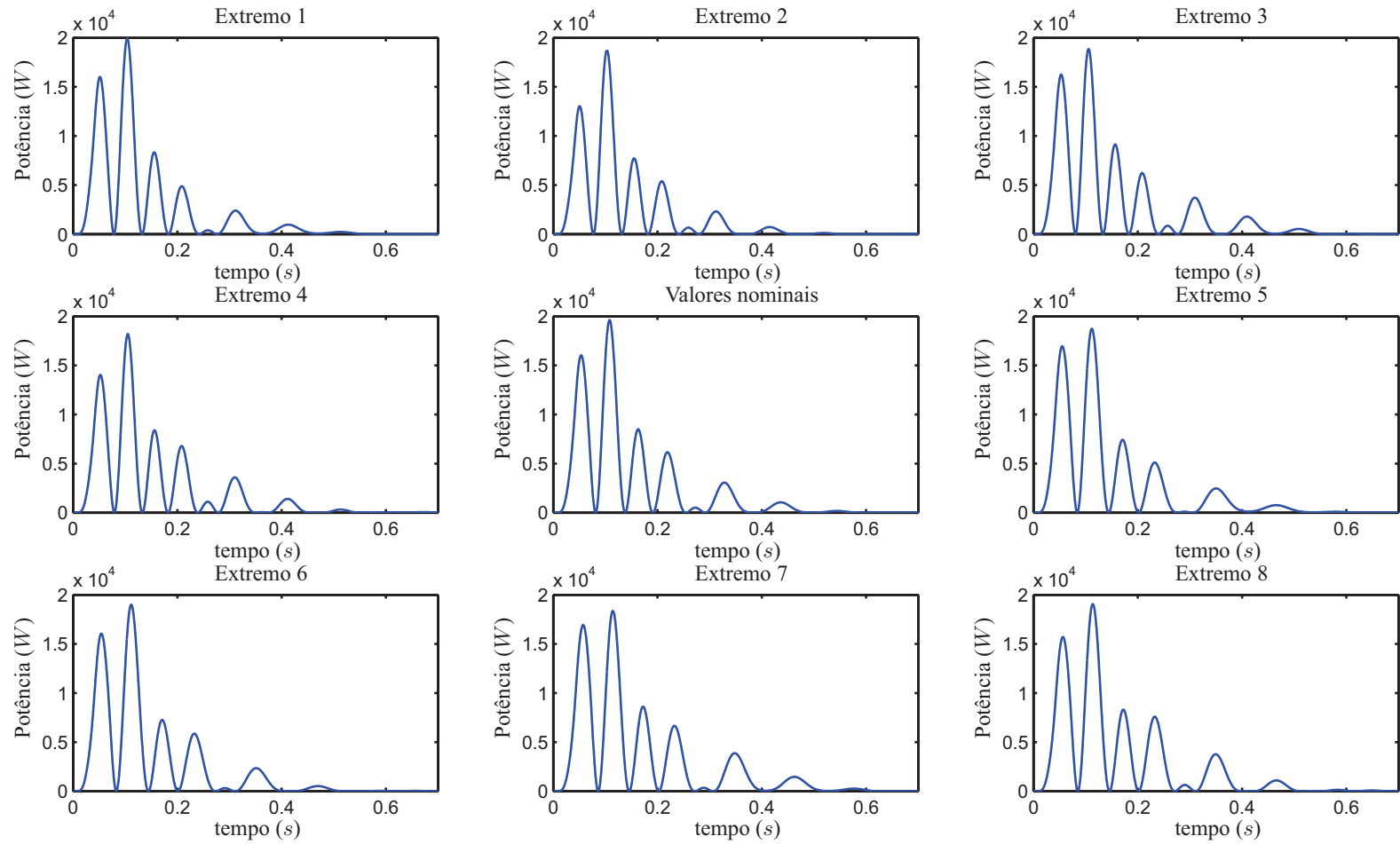


Figura 4.33: Potência necessária na suspensão traseira esquerda para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

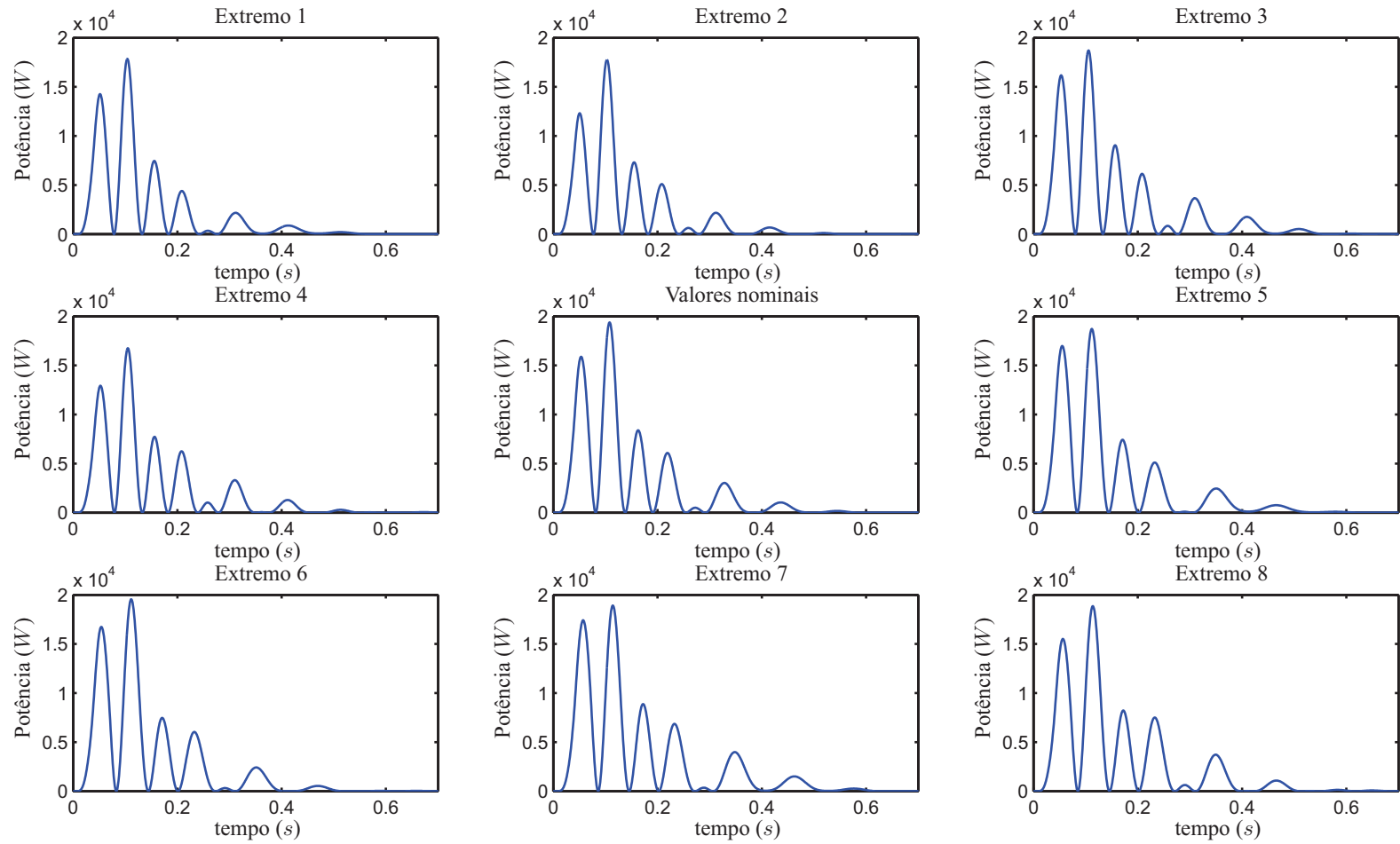


Figura 4.34: Potência necessária na suspensão dianteira esquerda para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

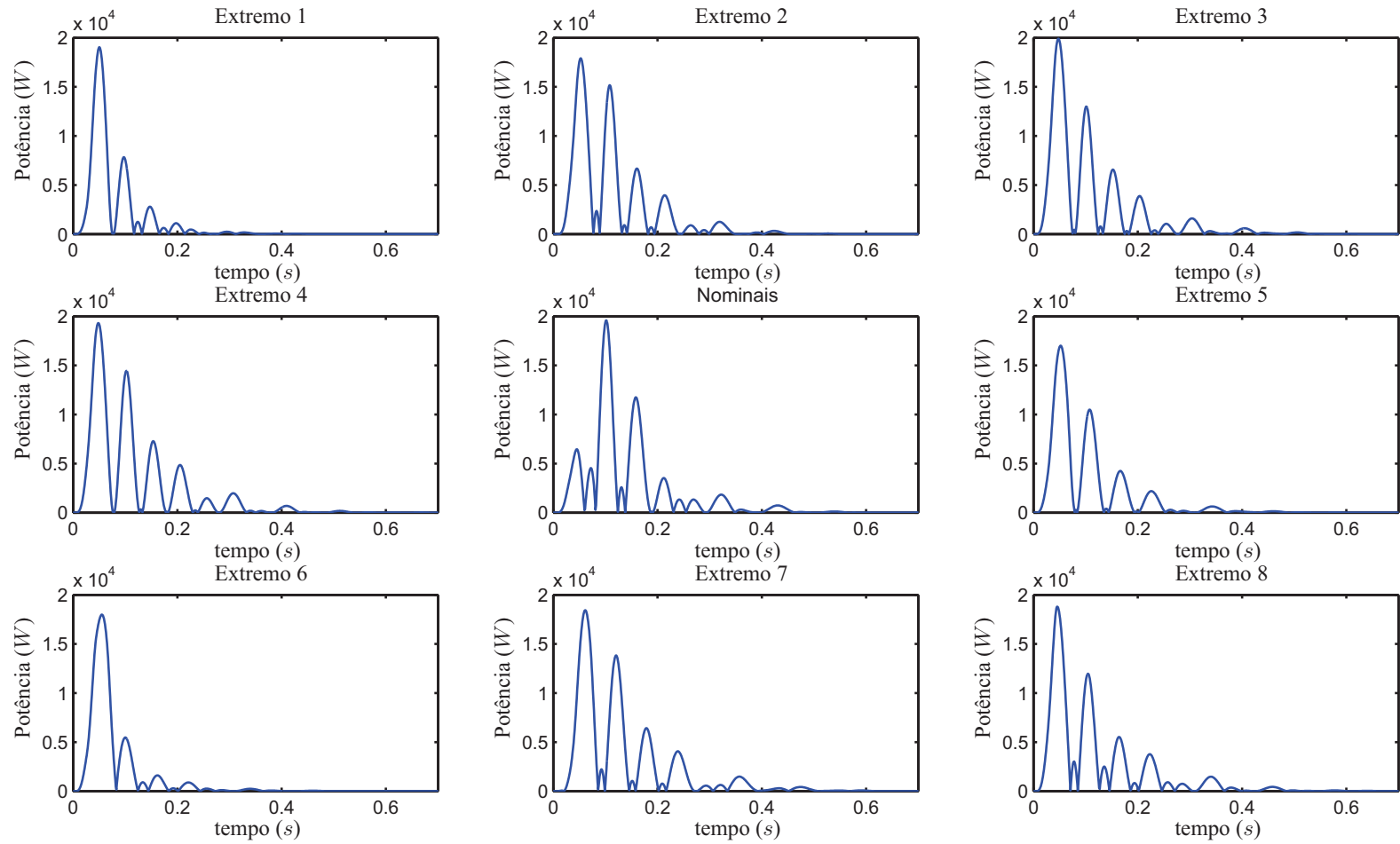


Figura 4.35: Potência necessária na suspensão dianteira direita para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

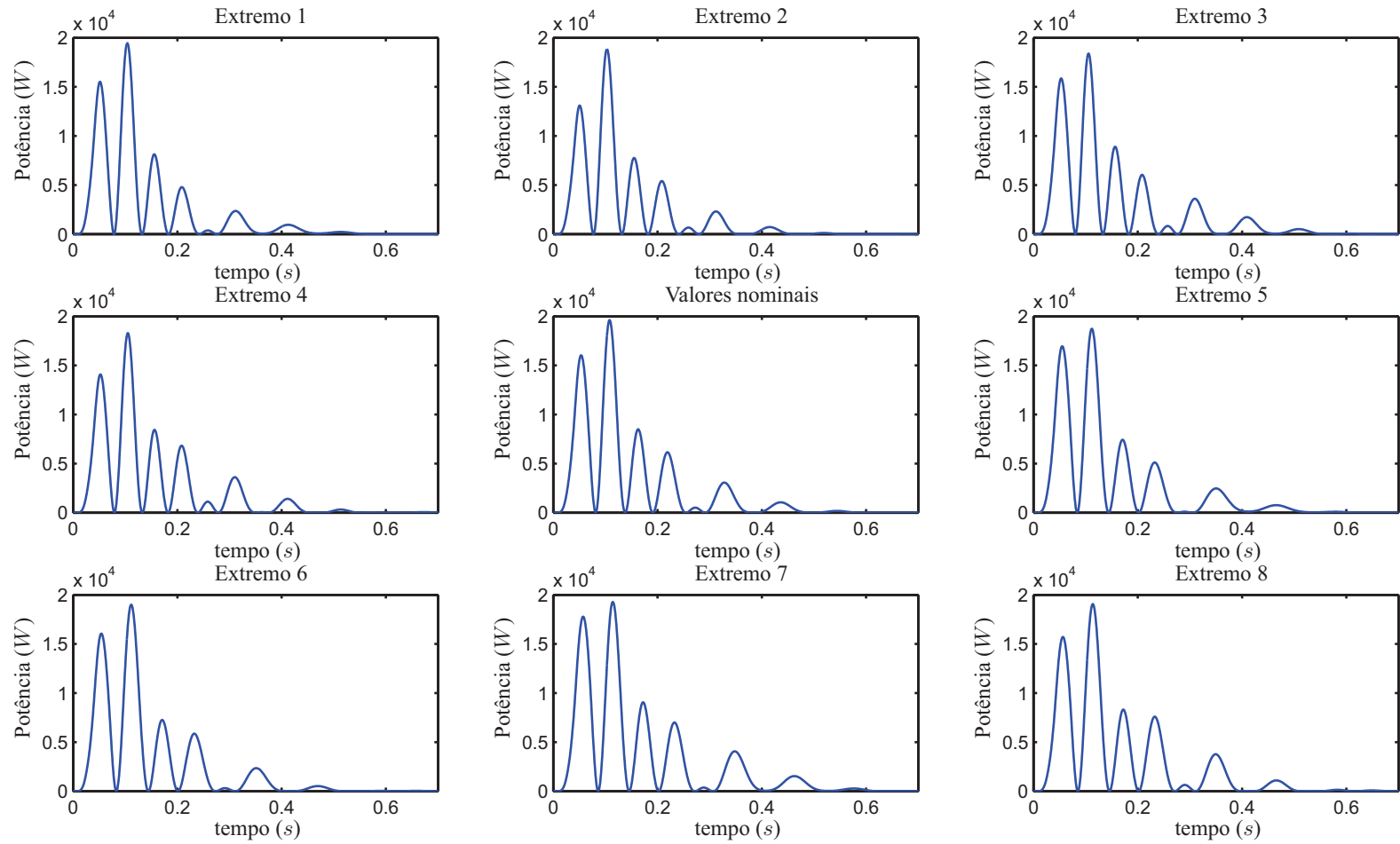


Figura 4.36: Potência necessária na suspensão traseira direita para controlar o sistema quando sujeito ao distúrbio (obstáculo).

O controlador obtido possui a mesma ordem do controlador obtido na seção anterior (ordem 21). Suas matrizes de estado são:

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{K1} & A_{K2} \end{bmatrix}; \quad (4.29)$$

$$A_{K1} = \begin{bmatrix} -0,6312 & 4,779 & 0,7295 & 60,8 & -97,81 & -3,991 & 3,828 & -31,35 & 24,72 & -13,88 & 1,499 \\ -1,235 & -38,51 & 12,76 & -82,54 & 114 & -57,11 & -84,94 & 29,2 & -120,5 & 21,37 & -6,767 \\ -1,127 & -22,78 & -38,75 & 55,49 & -47,82 & 114,9 & 32,37 & 18,18 & -72,06 & -13,65 & -1,327 \\ 1,49 & -33,05 & 45,57 & -392 & 509,2 & -548,2 & -299,3 & 4,567 & 17,92 & 100,7 & -9,219 \\ -4,456 & -8,165 & -53,43 & 83,9 & -120,7 & 309,1 & 53,74 & 70,48 & -276 & -25,53 & -5,536 \\ 5,809 & 21,48 & 62,06 & -76,58 & 26,72 & -279 & 66,22 & -103,7 & 386,6 & 5,371 & 10,87 \\ 3,261 & -43,69 & 78,85 & -577,8 & 627,2 & -934 & -443,9 & -26,02 & 105,2 & 145 & -10,88 \\ -1,087 & -13,48 & -8,185 & -59,35 & 65,5 & -63,95 & -81,56 & 13,24 & -91,08 & 16,34 & -4,612 \\ 0,6233 & 19,76 & -4,891 & 163 & -210,9 & 175,8 & 136,3 & -48,69 & 77,36 & -47,15 & 6,767 \\ 2,764 & 43,54 & 23,7 & 216,7 & -248,4 & 202,6 & 249,2 & -45,2 & 312,9 & -54,04 & 22,95 \\ -2,996 & -70,16 & 7,401 & -520,4 & 624,7 & -607,2 & -483 & 84,05 & -315,9 & 136,8 & -23,96 \\ 0,02907 & -0,005425 & -0,002415 & -0,05214 & 0,08715 & 0,005591 & -0,01055 & 0,03031 & -0,03514 & 0,01278 & -0,001919 \\ -0,04483 & -0,001099 & -0,005158 & -0,001771 & 0,01925 & 0,0437 & 0,01416 & 0,01766 & -0,02621 & 0,0001558 & -0,0008625 \\ 0,04425 & -0,005746 & -0,001542 & -0,05797 & 0,0909 & -0,004127 & -0,01423 & 0,0286 & -0,0331 & 0,01384 & -0,001929 \\ -0,04461 & -0,002476 & -0,006309 & -0,01473 & 0,04118 & 0,04979 & 0,01417 & 0,02513 & -0,03669 & 0,002773 & -0,00126 \\ -0,0009458 & 3,69 \cdot 10^{-5} & 1,041 \cdot 10^{-5} & 0,001021 & -0,004272 & -0,002304 & -0,0003468 & -0,003047 & 0,0006125 & -0,0007462 & 6,254 \cdot 10^{-5} \\ -0,0002068 & 0,0007601 & 0,000227 & 0,007681 & -0,01588 & -0,002014 & 0,001672 & -0,007173 & 0,004576 & -0,002585 & 0,000325 \\ -1,282 & -0,3062 & -2,058 & 180,5 & -617,5 & -372,1 & -166,4 & -357,5 & -12,9 & -83,23 & 4,013 \\ -1,016 & -1,658 & -1,271 & 75,65 & -351,4 & -232,3 & -91,47 & -223,7 & -16,99 & -49,96 & 1,438 \\ 0,03505 & 0,1006 & 0,08633 & -5,095 & 22,28 & 14,59 & 5,956 & 13,94 & 1,062 & 3,123 & -0,09608 \\ -0,06878 & 0,02365 & -0,08589 & 8,796 & -28,89 & -16,99 & -7,635 & -16,48 & -0,3597 & -3,883 & 0,2023 \end{bmatrix} ;$$

(4.30)

$$A_{K2} = \begin{bmatrix} 137,1 & -123 & 129,3 & -201,1 & 0,302 & -0,9183 & -3,253 & -0,8904 & -0,3257 & 0,03693 \\ 0,05156 & 0,2821 & 0,1267 & 0,3103 & -0,1454 & -0,1058 & 5,344 & 0,5783 & 0,01746 & -0,0226 \\ -0,3106 & 0,5331 & -0,2165 & 0,7129 & -0,09165 & -0,1242 & 1,412 & 0,5269 & 0,01763 & -0,01459 \\ 1,177 & -1,052 & 1,162 & -1,899 & 0,0975 & -0,07591 & 6,519 & -0,5568 & -0,01285 & 0,008368 \\ -0,1921 & 2,168 & 0,4185 & 2,546 & -0,3273 & -0,3778 & 6,61 & 2,308 & 0,03802 & -0,05803 \\ -0,1843 & -2,659 & -1,038 & -2,89 & 0,4366 & 0,5455 & -11,81 & -3,06 & -0,04897 & 0,0798 \\ 1,804 & -2,191 & 1,6 & -3,535 & 0,2288 & 0,01454 & 6,149 & -1,477 & -0,03004 & 0,0284 \\ -4,237 & 4,544 & -3,794 & 6,852 & -0,06066 & -0,4893 & 3,853 & 0,5015 & 0,05506 & -0,02493 \\ -3,625 & 2,614 & -3,647 & 4,697 & 0,04705 & 0,1769 & -6,02 & -0,5701 & 0,003913 & 0,01249 \\ 20,13 & -20,14 & 18,5 & -31,18 & 0,1503 & 1,766 & -12,72 & -1,166 & -0,2234 & 0,08241 \\ 17,09 & -12,79 & 16,98 & -22,62 & -0,1843 & -0,9186 & 19,26 & 1,79 & 0,003133 & -0,05616 \\ -7,129 & 77,37 & 3,715 & -1,611 & 0,1456 & -3,598 & 0,02957 & 0,06043 & 1,232 & -0,3317 \\ -49,79 & -9,803 & -0,781 & -4,828 & 1,644 & -8,331 & -0,01742 & -0,01593 & -0,3715 & 0,3162 \\ -2,345 & -0,6642 & -5,861 & 74,88 & -0,3737 & 3,682 & -0,01045 & -0,0344 & -0,7231 & 0,1583 \\ 0,1356 & 1,322 & -50,9 & -10,58 & -1,09 & 5,121 & 0,0194 & 0,02125 & 0,4499 & -0,2681 \\ 1,016 & -5,941 & -1,675 & 4,023 & -1,75 & 23,39 & -0,01345 & -0,05864 & -1,173 & 0,08341 \\ -0,742 & -1,104 & 0,3563 & 0,9012 & -8,511 & 8,142 & -0,001286 & -0,02599 & -0,5042 & -0,06325 \\ -4,211 & 3,372 & -4,192 & 6,69 & -0,228 & 1,393 & -16,91 & -0,0357 & -0,06633 & -0,007169 \\ 27,84 & -25,76 & 25,94 & -39,9 & -0,371 & 2,529 & -15,01 & -0,9656 & -0,2304 & 0,01516 \\ 25,76 & -163,4 & -46,52 & 113,2 & -67,29 & 449,7 & 0,4489 & -1,436 & -29,98 & 3,887 \\ -1,505 & -53,99 & -7,437 & 38,27 & -30,56 & 199,3 & -0,9696 & -0,8314 & -16,79 & 1,668 \end{bmatrix}; \quad (4.31)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 2,991.10^5 \\ -2,607.10^5 \\ 6639 \\ 5,11.10^6 \\ 9,196.10^5 \\ -2,89.10^6 \\ 7,007.10^6 \\ -8,65.10^6 \\ -4,459.10^6 \\ 4,297.10^7 \\ 8,637.10^6 \\ -139,6 \\ -24,96 \\ -164,2 \\ -75,98 \\ -43,74 \\ 27,62 \\ -5,066.10^4 \\ -1,861.10^4 \\ 1716 \\ -307,7 \end{bmatrix}; \quad (4.32)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} C_{k1} & C_{k2} \end{bmatrix}; \quad (4.33)$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} 0,003227 & 0,02055 & 0,04001 & 0,01597 & -0,06452 & -0,1308 & 0,04082 & -0,06576 & 0,2621 & -0,003445 & 0,01061 \\ 0,003227 & 0,02055 & 0,04001 & 0,01597 & -0,06452 & -0,1308 & 0,04082 & -0,06576 & 0,2621 & -0,003445 & 0,01061 \\ 0,003227 & 0,02055 & 0,04001 & 0,01597 & -0,06452 & -0,1308 & 0,04082 & -0,06576 & 0,2621 & -0,003445 & 0,01061 \\ 0,003227 & 0,02055 & 0,04001 & 0,01597 & -0,06452 & -0,1308 & 0,04082 & -0,06576 & 0,2621 & -0,003445 & 0,01061 \end{bmatrix}; \quad (4.34)$$

$$C_{k2} = \begin{bmatrix} -0,0003481 & -0,000414 & -0,0005093 & -0,0003868 & 0,0003477 & 0,0001955 & -0,009063 & -0,001491 & -3,844.10^{-5} & 5,241.10^{-5} \\ -0,0003481 & -0,000414 & -0,0005093 & -0,0003868 & 0,0003477 & 0,0001955 & -0,009063 & -0,001491 & -3,844.10^{-5} & 5,241.10^{-5} \\ -0,0003481 & -0,000414 & -0,0005093 & -0,0003868 & 0,0003477 & 0,0001955 & -0,009063 & -0,001491 & -3,844.10^{-5} & 5,241.10^{-5} \\ -0,0003481 & -0,000414 & -0,0005093 & -0,0003868 & 0,0003477 & 0,0001955 & -0,009063 & -0,001491 & -3,844.10^{-5} & 5,241.10^{-5} \end{bmatrix}; \quad (4.35)$$

A Tabela 4.21 apresenta os valores das normas H_∞ da função de transferência entre o distúrbio (irregularidade da pista) para os extremos associados a cada parâmetro incerto, calculada da maneira apresentada na equação (4.7).

Tabela 4.21: Valores das normas H_∞ de cada critério de desempenho - modelo de 7 graus de liberdade.

Desempenho	$\ P_{zw}\ _\infty$	$\ T_{zw}\ _\infty$	Δ_{zw}
Aceleração vertical do veículo no Extremo 1	137,7412	128,6923	-6,60
Aceleração vertical do veículo no Extremo 2	184,5110	172,8417	-6,32
Aceleração vertical do veículo no Extremo 3	149,1064	130,4840	-12,49
Aceleração vertical do veículo no Extremo 4	200,5213	173,1765	-13,64
Aceleração vertical do veículo no Extremo 5	104,3938	95,6576	-8,37
Aceleração vertical do veículo no Extremo 6	142,7781	127,5318	-10,68
Aceleração vertical do veículo no Extremo 7	113,3876	98,8459	-12,82
Aceleração vertical do veículo no Extremo 8	153,9370	130,2913	-15,36
Aceleração vertical do veículo para Valores Nominais	142,8086	128,3533	-10,12
Deslocamento relativo da roda no Extremo 1	36,5223	18,5711	-49,15
Deslocamento relativo da roda no Extremo 2	42,1637	20,9287	-50,36
Deslocamento relativo da roda no Extremo 3	47,5697	21,9788	-53,80
Deslocamento relativo da roda no Extremo 4	54,0561	24,5001	-54,67
Deslocamento relativo da roda no Extremo 5	41,0630	19,0054	-53,72
Deslocamento relativo da roda no Extremo 6	47,3826	21,5552	-54,51
Deslocamento relativo da roda no Extremo 7	53,9280	22,7027	-57,91
Deslocamento relativo da roda no Extremo 8	61,3501	25,4145	-58,57
Deslocamento relativo da roda para Valores Nominais	45,8712	21,2892	-53,59

Verificando os valores da Tabela 4.21, conclui-se que o controlador reduz de 7% a 15% a norma H_∞ relacionada à aceleração vertical do veículo. Comparando as reduções da norma da Tabela 4.16 com as reduções da Tabela 4.21 apenas para a aceleração vertical do veículo, verifica-se uma maior redução da norma quando a potência não foi limitada em 20 kW. Já a norma

H_{∞} relacionada ao deslocamento relativo das rodas foi reduzida entre 49% a 59%. Comparando as reduções da norma da Tabela 4.21 com as reduções da norma da Tabela 4.16 para o deslocamento relativo das rodas, pode-se dizer que as diferenças são pequenas.

A resposta em frequência da aceleração vertical do veículo em função do distúrbio é ilustrada na Figura 4.37. É possível verificar que o controlador reduz pouco as amplitudes das acelerações entre as frequências de 4 a 8 Hz quando comparadas com as amplitudes das acelerações da Figura 4.25.

A resposta em frequência do deslocamento das rodas em relação ao solo é ilustrada na Figura 4.38. É possível verificar que, quando comparado com a resposta em frequência do modelo sem controlador, o controlador reduz apenas o primeiro pico da resposta em frequência.

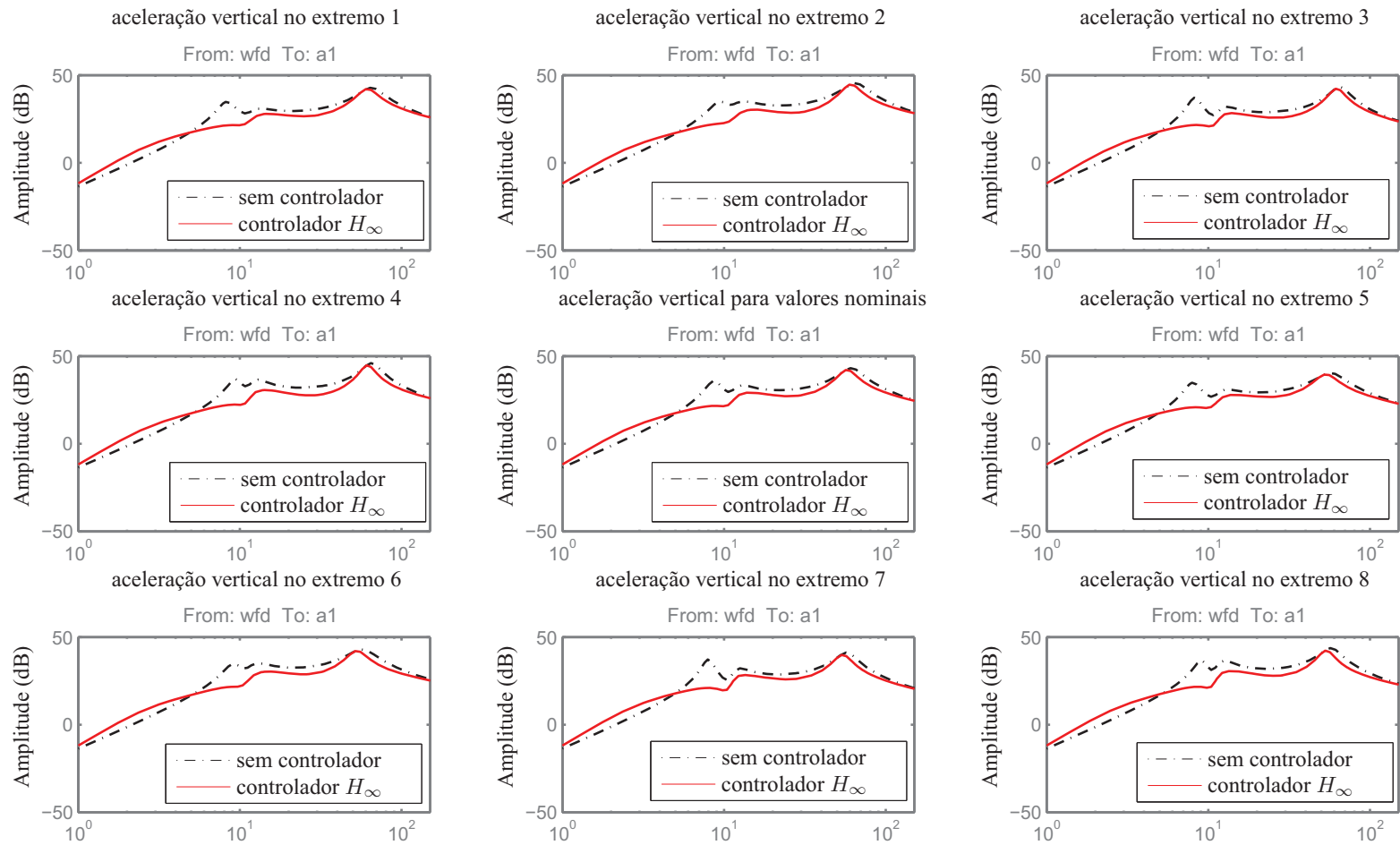


Figura 4.37: Resposta em frequência (aceleração) do sistema sem controlador e com controlador H_∞ projetado.

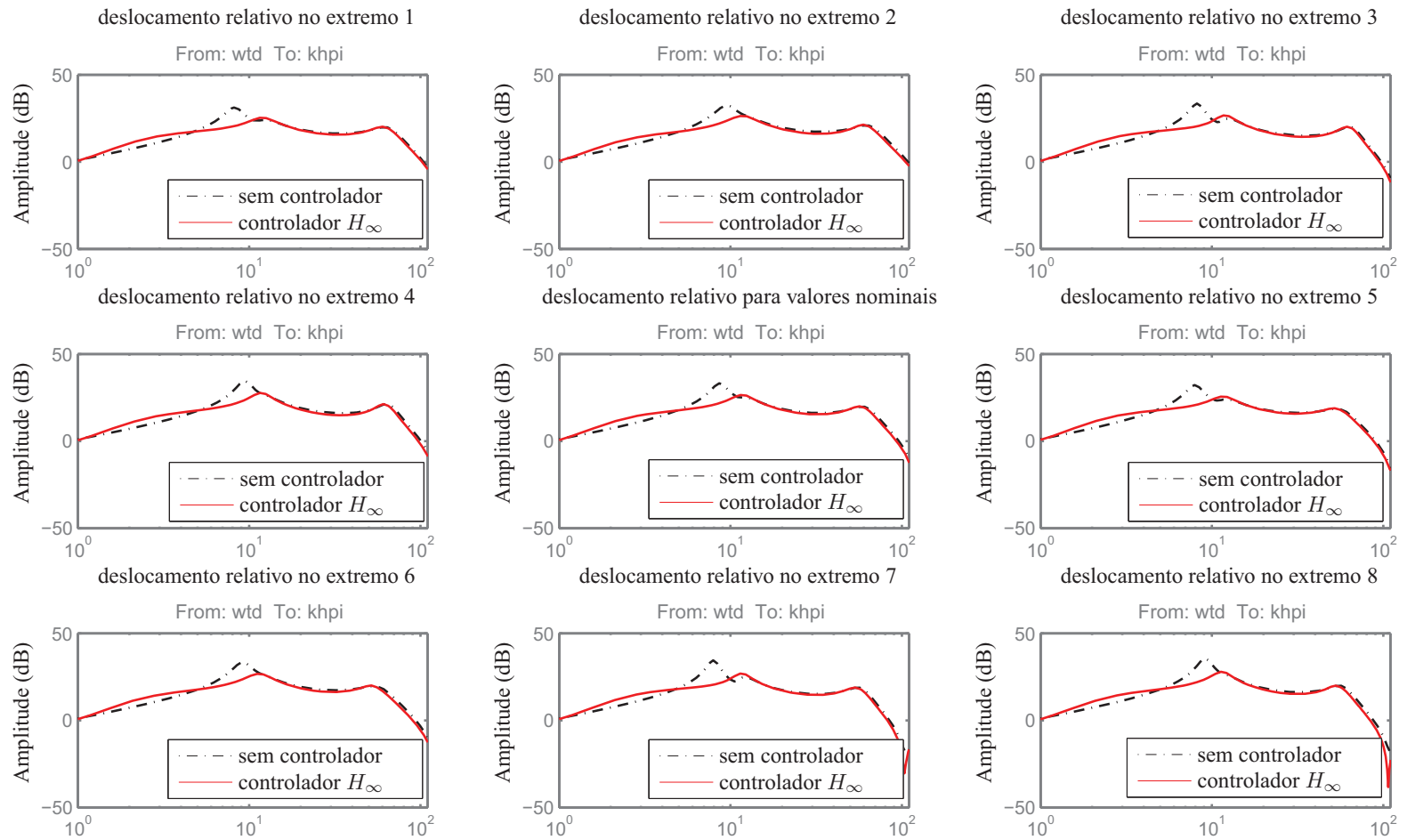


Figura 4.38: Resposta em frequência do sistema (deslocamento relativo da roda) sem controlador e com controlador H_∞ projetado.

A Figura 4.39 representa o comportamento da aceleração vertical do veículo após o mesmo passar pelo mesmo obstáculo definido no início deste capítulo. Nota-se que a redução da aceleração vertical do veículo ao longo do tempo foi menor que a redução ilustrada pela Figura 4.27.

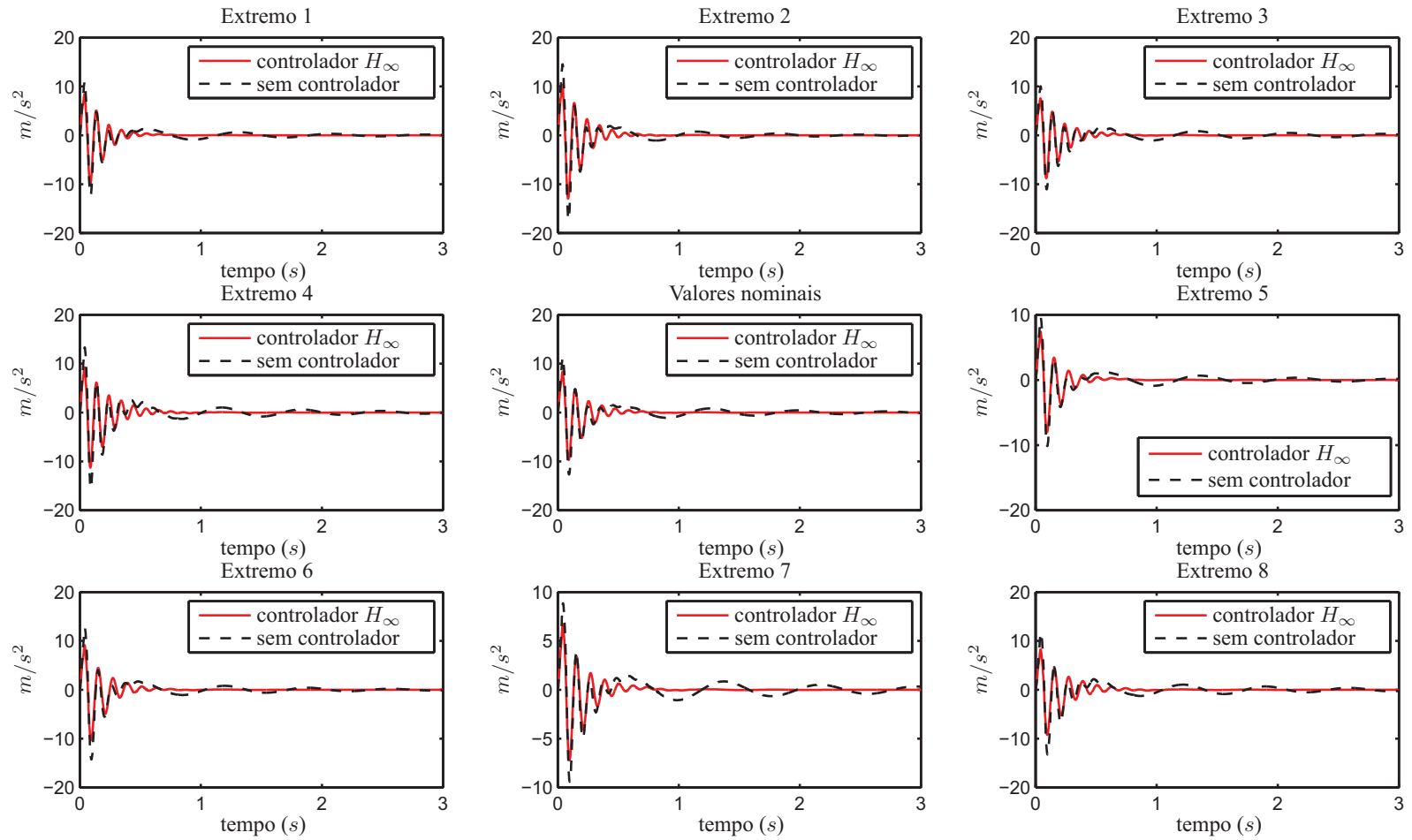


Figura 4.39: Aceleração vertical do veículo após a aplicação de um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.22 mostra o tempo de estabilização à 5%, calculado da maneira como mostrada na seção 4.1.1, dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. A forma desta comparação é mostrada pela equação (4.2). Houve redução do tempo de estabilização do sistema com controle em todos os extremos.

Tabela 4.22: Tempo de estabilização a 5% da aceleração vertical do veículo

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	1,34	0,46	-65,63
2	0,88	0,47	-47,05
3	1,77	0,56	-68,46
4	1,54	0,56	-63,31
5	1,44	0,52	-63,94
6	1,25	0,53	-57,69
7	2,22	0,64	-71,25
8	1,92	0,64	-66,62
Nominal	1,34	0,49	-63,28

A Tabela 4.23 mostra o valor do maior pico da aceleração vertical dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. Esta é feita de acordo com a equação (4.3). Com essa tabela é possível concluir que, apesar do aumento do tempo de estabilização nos extremos, o valor do maior pico do sistema com controle é até 31% menor que o maior pico do sistema sem controle em todos os extremos.

A Figura 4.40 representa o comportamento do deslocamento relativo entre as rodas e a pista ao passar pelo obstáculo.

Tabela 4.23: Máximo valor da aceleração vertical do veículo

Extremo	$p_{sc} (m/s^2)$	$p_{cc} (m/s^2)$	$\Delta_m (\%)$
1	10,9927	8,379	-23,78
2	14,5415	10,262	-29,43
3	10,0478	7,5753	-24,61
4	13,3432	9,2738	-30,50
5	9,6367	7,4302	-22,90
6	12,7617	9,1273	-28,48
7	8,86	6,7267	-24,08
8	11,7592	8,2432	-29,90
Nominal	11,3697	8,3709	-26,38

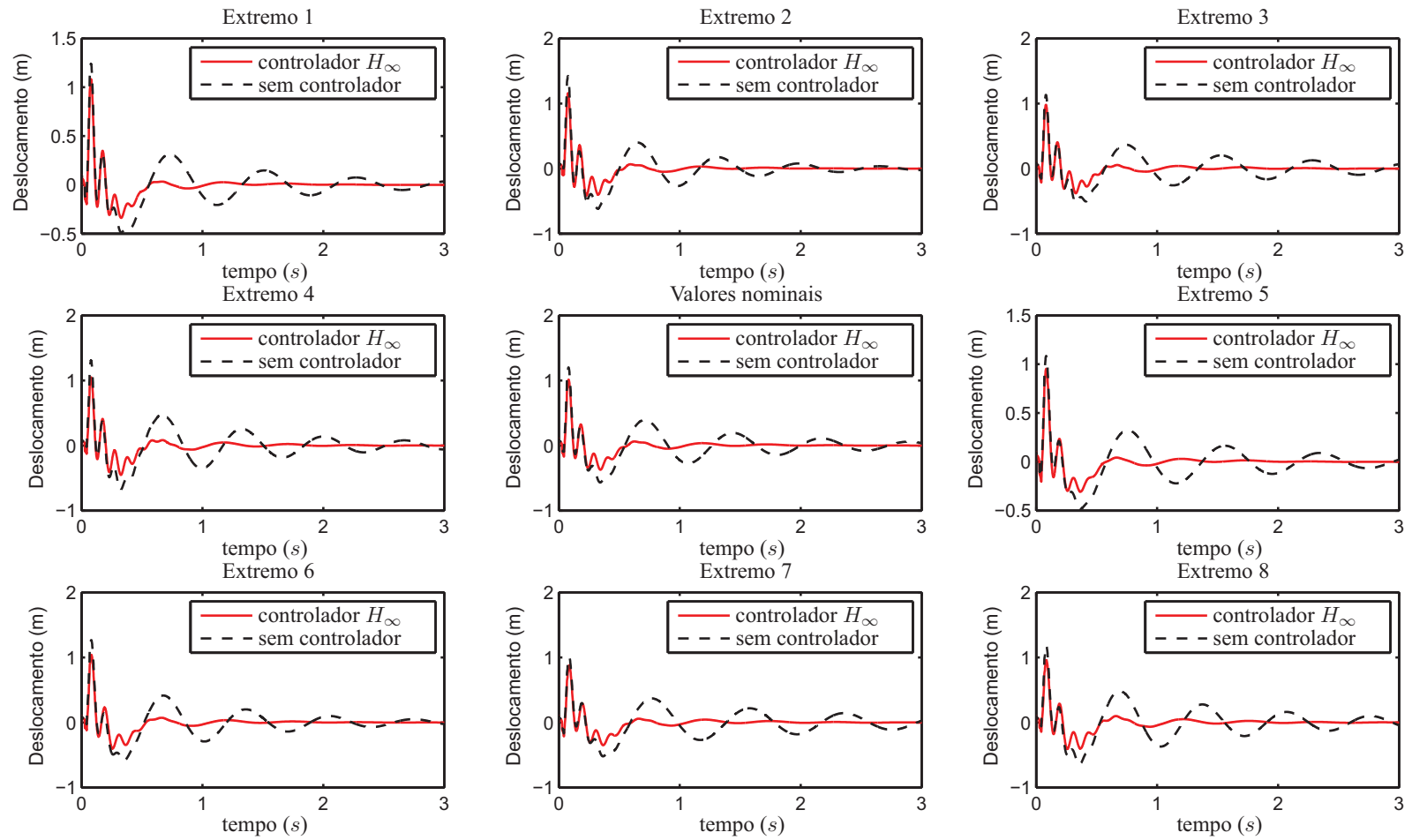


Figura 4.40: Deslocamento relativo das rodas após aplicar um distúrbio (obstáculo).

A Tabela 4.24 mostra o tempo de estabilização à 5%, calculado da maneira como mostrada na seção 4.1.1, dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores para o deslocamento relativo das rodas. A forma desta comparação é mostrada pela equação (4.2). Nota-se a redução no tempo de estabilização em todos os casos foi maior quando comparada à redução obtida na Tabela 4.19.

Tabela 4.24: Tempo de estabilização a 5% do deslocamento relativo das rodas.

Extremo	t_{sc} (s)	t_{cc} (s)	Δ_t (%)
1	2,35	0,52	-77,82
2	2,03	0,62	-69,64
3	2,53	0,69	-72,90
4	2,73	0,95	-65,14
5	2,82	0,53	-81,16
6	2,45	0,70	-71,37
7	2,90	0,96	-66,81
8	2,87	1,25	-56,37
Nominal	2,62	0,66	-74,72

A Tabela 4.25 mostra o valor do maior pico deslocamento relativo das rodas dos sistemas sem controle, com controle e a comparação entre esses valores. Esta é feita de acordo com a equação (4.3). Nota-se que, além da redução do tempo de estabilização, o maior valor da resposta temporal também foi reduzido em todos os extremos em até 20%. Entretanto, a redução obtida nesta tabela é menor quando comparada com a redução obtida na Tabela 4.20.

Tabela 4.25: Máximo valor do deslocamento relativo das rodas

Extremo	$m_{sc} (m)$	$m_{cc} (m)$	$\Delta_m (\%)$
1	1,2396	1,0834	-12,60
2	1,4237	1,1592	-18,58
3	1,133	0,9802	-13,49
4	1,3083	1,0482	-19,88
5	1,0852	0,9541	-12,08
6	1,2666	1,0392	-17,95
7	1,0104	0,8788	-13,02
8	1,1839	0,9555	-19,29
Nominal	1,1999	1,0135	-15,53

Capítulo 5

Conclusões e sugestões para próximos trabalhos

Nesse trabalho foi realizado o projeto de controladores para modelos de suspensões ativas usando técnicas de controle H_∞ . Os modelos de suspensões veiculares com 2, 4 e 7 graus de liberdade foram usados, comparando os resultados simulados do caso da suspensão passiva (sem controlador) com a situação da suspensão ativa (com controlador). O projeto do controlador levou em conta funções de ponderação, para contemplar a distribuição de frequência dos critérios de desempenho adotados. Considerou-se também as incertezas de modelagem, tendo em vista as variações da massa do veículo, amortecimento da suspensão e rigidez do pneu. O problema foi abordado segundo o ponto de vista das desigualdades matriciais lineares e o tratamento das incertezas paramétricas usou o conceito da estabilidade quadrática. Foram verificadas as respostas simuladas em frequência e no tempo (para o comportamento do veículo ao passar por um obstáculo). Para a solução numérica do problema, foi utilizado o software *MATLAB 7.4* com dois pacotes de otimização que permitem resolver problemas baseados em desigualdades matriciais lineares: Yalmip e Sedumi.

Considerando as incertezas de modelagem e as funções de ponderações aplicadas nos três modelos de suspensões existentes, foi possível obter controladores que atenuassem a aceleração vertical do veículo (parâmetro relacionado com o conforto dos passageiros) e o deslocamento relativo das rodas (parâmetro relacionado com a segurança dos passageiros).

Após verificar as respostas do modelo de 2 graus de liberdade controlado nos 8 vértices e no ponto nominal, constatou-se uma redução de 45% da norma H_∞ do sistema com controle quando comparada com o valor da norma do sistema sem controle. Além disso, foi possível verificar uma melhora na norma H_∞ relacionada à aceleração vertical do veículo.

Aplicando um sinal que representa um obstáculo neste modelo, foi possível verificar que o tempo de estabilização a 5% para a aceleração vertical do veículo não foi reduzido em todos os casos. Porém, o pico da resposta temporal da aceleração foi reduzido em quase 100%. Além disso, foi possível notar que, com a aplicação deste sinal, o tempo de estabilização a 5% para o deslocamento relativo da roda foi reduzido entre 37% e 61%, aproximadamente, e o pico da resposta também foi reduzido entre 20% e 26%.

As mesmas simulações foram feitas para o modelo de 4 graus de liberdade. Verificou-se que, após simular as respostas do modelo com e sem controlador nos 8 vértices e no ponto nominal, a norma H_∞ relacionada com o deslocamento relativo das rodas foi reduzida entre 25% e 41%, e a norma H_∞ relacionada com a aceleração vertical do veículo foi reduzida entre 6% e 16%. A partir da Figura 5.11, foi possível notar que o controlador atenua apenas o primeiro pico das respostas em frequência.

Ao simular este modelo passando pelo obstáculo, foi possível verificar que não houve redução do tempo de estabilização a 5% para a aceleração vertical do veículo. Porém, o máximo valor dessa resposta temporal foi reduzida entre 60% e 70%. O tempo de estabilização a 5% para o deslocamento relativo das rodas foi reduzido entre 4% e 11%, e o máximo valor dessa resposta temporal foi reduzida entre 32% e 51%. A potência necessária para obter esse resultado foi de, aproximadamente, 50 kW.

Ao limitar a potência do controlador em 20 kW deste modelo, verificou-se que houve um aumento na norma H_∞ relacionada com a aceleração vertical do veículo e com o deslocamento relativo das rodas. Porém, as normas do sistema sem controle são reduzidas entre as frequências de 1 a 11 Hz, que abrange a faixa de 4 a 8 Hz estabelecida pela norma ISO 2631 para a aceleração vertical do veículo. Quando o modelo fica sujeito ao obstáculo, verifica-se um aumento no tempo de estabilização e uma redução no máximo valor da resposta temporal tanto para a aceleração vertical do veículo quanto para o deslocamento relativo das rodas. Entretanto, a redução do máximo valor da resposta temporal obtida nesta simulação foi menor que a redução obtida utilizando um

controlador de 50 kW.

Estendendo o estudo para o modelo de 7 graus de liberdade, o controlador projetado para o modelo de 7 graus de liberdade melhorou as 9 possíveis respostas dos sistemas após as simulações. Verificou-se que, após simular as respostas do modelo com e sem controlador nos 8 extremos e no ponto nominal, a redução da norma H_∞ relacionada com o deslocamento relativo das rodas foi de 46% a 57%, e da norma H_∞ relacionada com a aceleração vertical do veículo foi de 11% a 22%.

Simulando este modelo passando pelo obstáculo, foi possível verificar que o tempo de estabilização a 5% para a aceleração vertical do veículo aumentou em todos os extremos. Entretanto, o máximo valor dessa resposta temporal foi reduzido entre 84% e 92%. O tempo de estabilização a 5% para o deslocamento relativo das rodas foi reduzido entre 2% e 32%, e o máximo valor dessa resposta temporal foi reduzida entre 34% e 46%. A potência necessária para este controle foi de 60 kW.

Ao limitar a potência do controlador em 20 kW deste modelo, verificou-se que houve uma redução na norma H_∞ relacionada com a aceleração vertical do veículo entre 7% e 15% e uma redução da norma H_∞ relacionada com o deslocamento relativo das rodas entre 49% e 59%. Porém, a redução dessa norma para a aceleração vertical do veículo foi menor que a redução obtida utilizando um controlador de 70 kW. Quando este modelo fica sujeito ao obstáculo, verifica-se uma redução no tempo de estabilização e no máximo valor da resposta temporal tanto para a aceleração vertical do veículo quanto para o deslocamento relativo das rodas. Entretanto, a redução obtida nesta simulação foi menor que a redução obtida utilizando o controlador anterior.

Baseado nos resultados reportados, conclui-se que o método de controle H_∞ , quando aplicado nos modelos existentes de suspensão ativa, melhora a aceleração vertical do veículo e o deslocamento das rodas em relação à pista, cujos desempenhos estão associados ao conforto e à segurança dos passageiros, respectivamente, mesmo quando o sistema está sujeito à variação dos valores da massa, rigidez e amortecimento, definindo assim a robustez do controlador obtido. Isso aconteceu graças à inclusão das funções de ponderação nos sistemas, pois sem elas não foi possível obter um resultado satisfatório.

As desigualdades matriciais lineares (LMI) foram usadas neste trabalho devido à sua flexibilidade para inclusão de novas restrições. Como os modelos simulados com as suspensões projetadas tiveram um comportamento satisfatório, conclui-se que este método é viável para a utilização nos modelos de suspensões ativa.

O presente trabalho analisou o comportamento da aceleração vertical do veículo para os modelos em estudo. Fica como sugestão para próximos trabalhos a análise de qual aceleração, vertical ou angular, para os modelos de 4 e 7 graus de liberdade seria mais adequada como medida de desempenho.

Além disso, as técnicas de controle H_2 e H_2/H_∞ são também alternativas para a abordagem deste problema. Portanto, para próximos trabalhos, seria interessante verificar o comportamento do controlador H_2 e controlador H_2/H_∞ , projetado também por LMI, nas simulações aqui efetuadas. Outra proposta seria a construção de um protótipo para experimentos em bancada, comparando e validando os dados experimentais com os dados obtidos das simulações.

Referências Bibliográficas

- [1] AKBARI, A., YOUSEFI, A., LOHMANN, B. *Low Order Robust Controllers for Active Vehicle Suspensions*, IEEE Transactions on Automatic Control, (12) 693-698, 2006.
- [2] BOUZARA, M., RICHARD, M. J. *An Optimization Method Design to Improve 3D Vehicle Confort and Road Holding Capacity Through the Use of Active and Semi-Active Suspension*, European Journal of Mechanics, (20) 509-520, 2001.
- [3] BOYD, S. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [4] CABELLO, R. V. C. , SERPA, A. L. *Controle H-infinito de Bibrações com Restrições no Esforço de Controle*, Dissertação de Mestrado, FEM-UNICAMP, 2009. Campinas, SP, Brasil.
- [5] CAMINO, J. F., ZAMPIERI, D. E., PERES, P. L. D. *Análise de Suspensões Veiculares Utilizando Técnicas de Controle Robusto*, Dissertação de Mestrado, FEM-Unicamp, 1998. Campinas, SP, Brasil.
- [6] CASE AGRICULTURA, consultado em [http : //www.caseih.com/products](http://www.caseih.com/products) a aplicação da suspensão ativa em pulverizadores, 2008.
- [7] CHALASANI, R. M. *Ride Performance of Active Suspension Systems*, ASME, AMD-80, 187-204, 1987.
- [8] CROLLA, D. A., ABDEL-HARDY, M. B. A. *Active Suspension Control: Performance Comparisons Using Control Laws Applied to a Full Vehicle Model*, Vehicle Systems Dynamics, (2) 107-120, 1991.

- [9] ELBEHEIRY, E. M., KARPNOPP, D. C. *Optimal Control of Vehicle Random Vibration with Constrained Suspension Deflection*, Journal of Sound and Vibration, (189) 547-564, 1996.
- [10] ELMADANY, M. M., ABDULJABBAR, Z. *Alternative Control Laws for Active and Semi-Active Automotive Suspensions - a Comparative Study*, Computers & Structures, (36) 623-629, 1991.
- [11] HARRIS W., *HowStuffWorks - Amortecedores*, consultado em <http://carros.hsw.uol.com.br> o funcionamento de um amortecedor, 2008.
- [12] HAYAKAWA, K., MATSUMO, K., YAMASHITA, M., SUZUKI, Y., FUJIMORI, K., KIMURA, H. *Robust H_∞ -Output Feedback Control of Decoupled Automobile Active Suspension Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, (4) 2658-2663, 1999.
- [13] ISO 2631, *Guia Para Avaliação da Exposição Humana à Vibrações de Corpo Inteiro*, 2nd edition, 1978.
- [14] KARNOPP, D. *Theoretical Limitations in Active Vehicle Suspensions*, Vehicle System Dynamics, (15) 41-54, 1986.
- [15] KASHANI, R., KIRCZI, S. *Robust Stability Analysis of LQG-Controlled Active Suspension with Model Uncertainty Using Structured Singular Value*, Vehicle System Dynamics, (21) 361-384, 1992.
- [16] KIRK, D. E. *Optimal Control Theory*, Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
- [17] KRUCKEC, A. and STRIBRSKY, A. *A Full-Car Model for Active Suspension - Some Practical Aspects*, IEEE Transactions on Automatic Control, (3) 41-45, 2004.
- [18] LÖFBERG, J., *Yalmip: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*, IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan, 2004.
- [19] MALCOM, C., WANG, F. C. *Controller Parameterization for Disturbance Response Decoupling: Application to Vehicle Active Suspension Control*, IEEE Transactions on Automatic Control, (10)393-407, 2002.

- [20] MAZONI, A. F., SERPA, A. L. *Estudo de Técnicas de Controle H_∞ para Estruturas Flexíveis com Incertezas*, Dissertação de Mestrado, FEM-UNICAMP, 2007. Campinas, SP, Brasil.
- [21] NEMA Automação Industrial, consultado em <http://www.gruponema.com> o catálogo de atuadores, 2009.
- [22] OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*, 4th edition Pretience-Hall, Rio de Janeiro, 1993.
- [23] OKABE, E. P., DEDINI, F. G. *Metodologia de Projeto para o Desenvolvimento de Suspensão Veicular*, Dissertação de Mestrado, FEM-UNICAMP, 2003. Campinas, SP, Brasil.
- [24] SAMMIER, D., SENAME, O., DUGARD, L. *H_∞ Control of Active Vehicle Suspensions*, IEEE Transactions on Automatic Control, (10) 976-981, 2000.
- [25] SÁNCHEZ-PENÃ, R. S., SZNAIR, M. *Robust Systems Theory and Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [26] SARRACINI Jr., F., SERPA, A. L. *Síntese de Controladores H_∞ de Ordem Reduzida com Aplicação no Controle Ativo de Estruturas Flexíveis*, Dissertação de Mestrado, FEM-Unicamp, 2006. Campinas, SP, Brasil.
- [27] SHIMAMUNE, R., Tanifuji, K. *Application of Oil-Hydraulic Actuator for Active Suspension of Railway Vehicle: Experimental Study*, IEEE Transactions on Automatic Control, (8) 1335-1340, 1995.
- [28] STURM, J. F. *A MATLAB Toolbox For Optimization Over Symmetric Cones*, Departament of Econometrics, Tilburg University, Tilburg, The Netherlands, 2001.
- [29] TAKAHASHI, R. H., CAMINO, J. F., ZAMPIERI, D. E., PERES, P. L. D. *A Multiobjective Approach for H_2 and H_∞ Active Suspension Control*, IEEE Transactions on Automatic Control, (1) 48-52, 1998.
- [30] TERAMURA, E., SHUICH, O., MASUMOTO, O., KUROYANAGI, K. M., HODAIRA, O. K. *Automotive suspension control system utilizing variable damping force shock absorber*, USA Patent, 1995.

- [31] THOMPSON, A. G., DAVIS, B. R. *Optimal Linear Active Suspension with Derivate Constraints and Output Feedback Control*, Vehicle Systems Dynamics, (17) 179-192, 1988.
- [32] THOMPSON, A. G. *Design of Active Suspensions*, Proc. Instn. Mech. Engrs, (36) 553-563, 1971.
- [33] THOMPSON, A. G. *Optimal and Suboptimal Linear Active Suspension for Road Vehicles*, Vehicle System Dynamics, (13) 61-72, 1984.
- [34] TOYOTA, consultado em <http://www.toyota-industries.com.br> a aplicação da suspensão ativa nas empilhadeiras, 2008.
- [35] WANG, J., WILSON, D. A., XU, W., CROLLA, D. A. *Active Suspension Control to Improve Vehicle Ride and Steady-State Handling*, IEEE Transactions on Automatic Control, (11) 1982-1987, 2005.
- [36] Wikipedia, consultado em <http://pt.wikipedia.org> os objetivos da suspensão automotiva, WIKIPEDIA, 2008.
- [37] ZHOU, K., DOYLE, J. C. *Essentials of Robust Control*, Pretience-Hall, New Jersey, 1996.

Anexo A - Dedução das equações dinâmicas dos modelos

Modelo com 2 graus de liberdade

O diagrama de corpo livre para o sistema de dois graus de liberdade é apresentado na Figura 5.1.

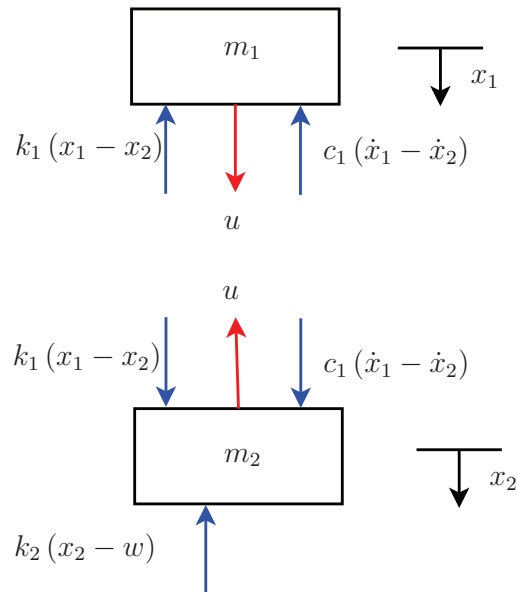


Figura 5.1: Diagrama de corpo livre do modelo de 2 graus de liberdade (hipótese $x_1 > x_2 > w$)

Nesta figura tem-se:

- u é a força que o atuador exerce;

- w é o deslocamento proveniente do distúrbio devido às irregularidades da pista;

Baseado no diagrama de corpo livre, e na segunda lei de Newton, pode-se escrever as equações dinâmicas para a massa m_1 :

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_1\dot{x}_2 + k_1x_1 - k_1x_2 = u.$$

Aplicando a segunda lei de Newton para a massa m_2 tem-se:

$$m_2\ddot{x}_2 + c_1\dot{x}_2 - c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_2 - k_1x_1 = k_2w - u.$$

Colocando o sistema na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = u \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + w \begin{Bmatrix} 0 \\ k_2 \end{Bmatrix}.$$

Com a equação de movimento, pode-se obter a equação na forma de estados, ou seja:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{-c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{-k_1-k_2}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & \frac{-c_1}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ \frac{-1}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1} \underbrace{u}_{\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_2} \underbrace{w}_{\mathbf{w}},$$

onde:

x_1 corresponde ao deslocamento vertical do veículo;

x_2 corresponde ao deslocamento vertical da roda;

x_3 corresponde à velocidade vertical do veículo, ou seja \dot{x}_1 ;

x_4 corresponde à velocidade vertical da roda, ou seja \dot{x}_2 .

Modelo com 4 graus de liberdade

Da mesma forma que no modelo de dois graus de liberdade, utiliza-se o diagrama de corpo livre e a segunda lei de Newton para determinar as equações de movimento do sistema. O diagrama de corpo livre é dado pela Figura 5.2.

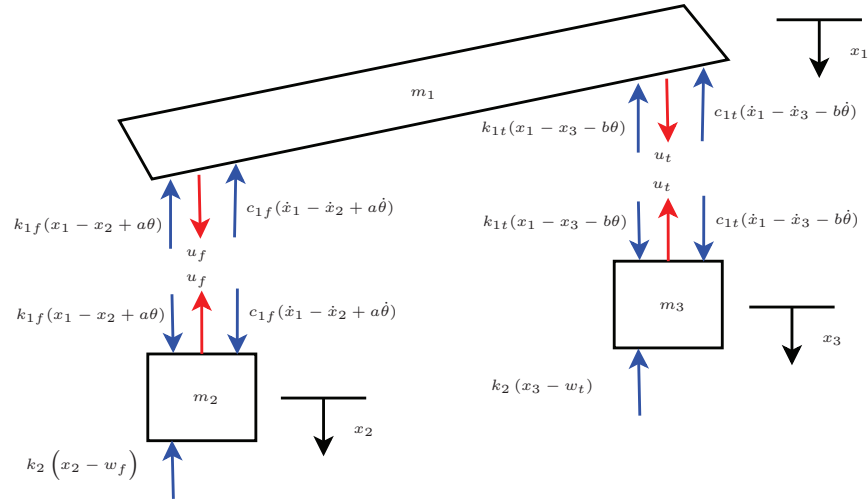


Figura 5.2: Diagrama de corpo livre para o modelo de 4 graus de liberdade (hipótese $x_1 > x_2 > w_f$ e $x_1 > x_3 > w_t$) e pequenas deflexões angulares.

Nesta figura tem-se:

- u_f e u_t são as forças que os atuadores exercem;
- w_f e w_d são os deslocamentos provenientes dos distúrbios devido às irregularidades da pista.

Baseado na Figura 5.2, pode-se escrever as equações dinâmicas do sistema. Para a massa m_1 é possível aplicar a segunda lei de Newton, obtendo duas equações dinâmicas:

$$u_f b - u_t a = I\ddot{\theta} - (-c_{1t}b + c_{1f}a)\dot{x}_1 + c_{1f}a\dot{x}_2 - c_{1t}b\dot{x}_3 - (c_{1f}a^2 + c_{1t}b^2)\dot{\theta} + (-k_{1t}b + k_{1f}a)x_1 + k_{1f}ax_2 - k_{1t}bx_3 - (k_{1f}a^2 + k_{1t}b^2)\theta;$$

$$u_t + u_f = m_1\ddot{x}_1 + (c_{1f} + c_{1t})\dot{x}_1 - c_{1f}\dot{x}_2 - c_{1t}\dot{x}_3 + (-c_{1t}b + c_{1f}a)\dot{\theta} + (k_{1f} + k_{1t})x_1 - k_{1f}x_2 - k_{1t}x_3 + (-k_{1t}b + k_{1f}a)\theta.$$

Aplicando a segunda lei de Newton para a massa m_2 , tem-se:

$$\begin{aligned} k_2 w_f - u_f &= m_2 \ddot{x}_2 + c_{1f} \dot{x}_2 - c_{1f} \dot{x}_1 - c_{1f} a \dot{\theta} \\ &\quad + (k_{1f} + k_2) x_2 - k_{1f} x_1 - k_{1f} a \theta. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo procedimento para a massa m_3 , tem-se:

$$\begin{aligned} k_2 w_t - u_t &= m_3 \ddot{x}_3 + c_{1t} \dot{x}_3 - c_{1t} \dot{x}_1 + c_{1t} b \dot{\theta} \\ &\quad + (k_{1t} + k_2) x_3 - k_{1t} x_1 + k_{1t} b \theta. \end{aligned}$$

Colocando as equações na forma matricial, tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1f} + c_{1t} & -c_{1f} & -c_{1t} & c_{1f}a - c_{1t}b \\ -c_{1f} & c_{1f} & 0 & -c_{1f}a \\ -c_{1t} & 0 & c_{1t} & c_{1t}b \\ c_{1f}a - c_{1t}b & -c_{1f}a & c_{1t}b & c_{1t}b^2 + c_{1f}a^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{1f} + k_{1t} & -k_{1f} & -k_{1t} & k_{1f}a - k_{1t}b \\ -k_{1f} & k_{1f} + k_2 & 0 & -k_{1f}a \\ -k_{1t} & 0 & k_{1t} + k_2 & k_{1t}b \\ k_{1f}a - k_{1t}b & -k_{1f}a & k_{1t}b & k_{1t}b^2 + k_{1f}a^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \theta \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_f + u_t \\ k_2 w_f - u_f \\ k_2 w_d - u_t \\ u_t b - u_f a \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}.$$

Com a equação de movimento, pode-se obter a equação na forma de estados, ou seja:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_{1f}-k_{1t}}{m_1} & \frac{k_{1f}}{m_1} & \frac{k_{1t}}{m_1} & \frac{k_{1t}b-k_{1f}a}{m_1} & \frac{-c_{1f}-c_{1t}}{m_1} & \frac{c_{1f}}{m_1} & \frac{c_{1t}}{m_1} & \frac{c_{1t}b-c_{1f}a}{m_1} \\ \frac{k_{1f}}{m_2} & \frac{-k_{1f}-k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_{1f}a}{m_2} & \frac{c_{1f}}{m_2} & \frac{-c_{1f}}{m_1} & 0 & \frac{c_{1f}a}{m_2} \\ \frac{k_{1t}}{m_2} & 0 & \frac{-k_{1t}-k_2}{m_2} & \frac{-k_{1t}b}{m_2} & \frac{c_{1t}}{m_2} & 0 & \frac{-c_{1t}}{m_1} & \frac{-c_{1t}b}{m_2} \\ \frac{k_{1t}b-k_{1f}a}{I} & \frac{k_{1f}a}{I} & \frac{-k_{1t}b}{I} & \frac{-k_{1t}b^2-k_{1f}a^2}{I} & \frac{c_{1t}b-c_{1f}a}{I} & \frac{c_{1f}a}{I} & \frac{-c_{1t}b}{I} & \frac{-c_{1t}b^2-c_{1f}a^2}{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{u_f+u_t}{m_1} \\ \frac{-u_f}{m_2} \\ \frac{-u_t}{m_2} \\ \frac{u_tb-u_da}{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2w_f}{m_2} \\ \frac{k_2w_d}{m_2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_2\mathbf{w}},
\end{aligned}$$

onde:

x_1 corresponde ao deslocamento vertical do veículo;

x_2 corresponde ao deslocamento vertical da roda dianteira;

x_3 corresponde ao deslocamento vertical da roda traseira;

x_4 corresponde ao deslocamento angular do veículo, ou seja θ ;

x_5 corresponde à velocidade vertical do veículo, ou seja \dot{x}_1 ;

x_6 corresponde à velocidade vertical da roda dianteira, ou seja \dot{x}_2 ;

x_7 corresponde à velocidade vertical da roda traseira, ou seja \dot{x}_3 ;

x_8 corresponde à velocidade angular do veículo, ou seja $\dot{\theta}$.

Modelo com 7 graus de liberdade

Da mesma forma que nos modelos anteriores, utilizou-se o diagrama de corpo livre e a segunda lei de Newton para determinar as equações de movimento do sistema. O diagrama de corpo livre para o modelo de sete graus de liberdade é dado pela Figura 5.3.

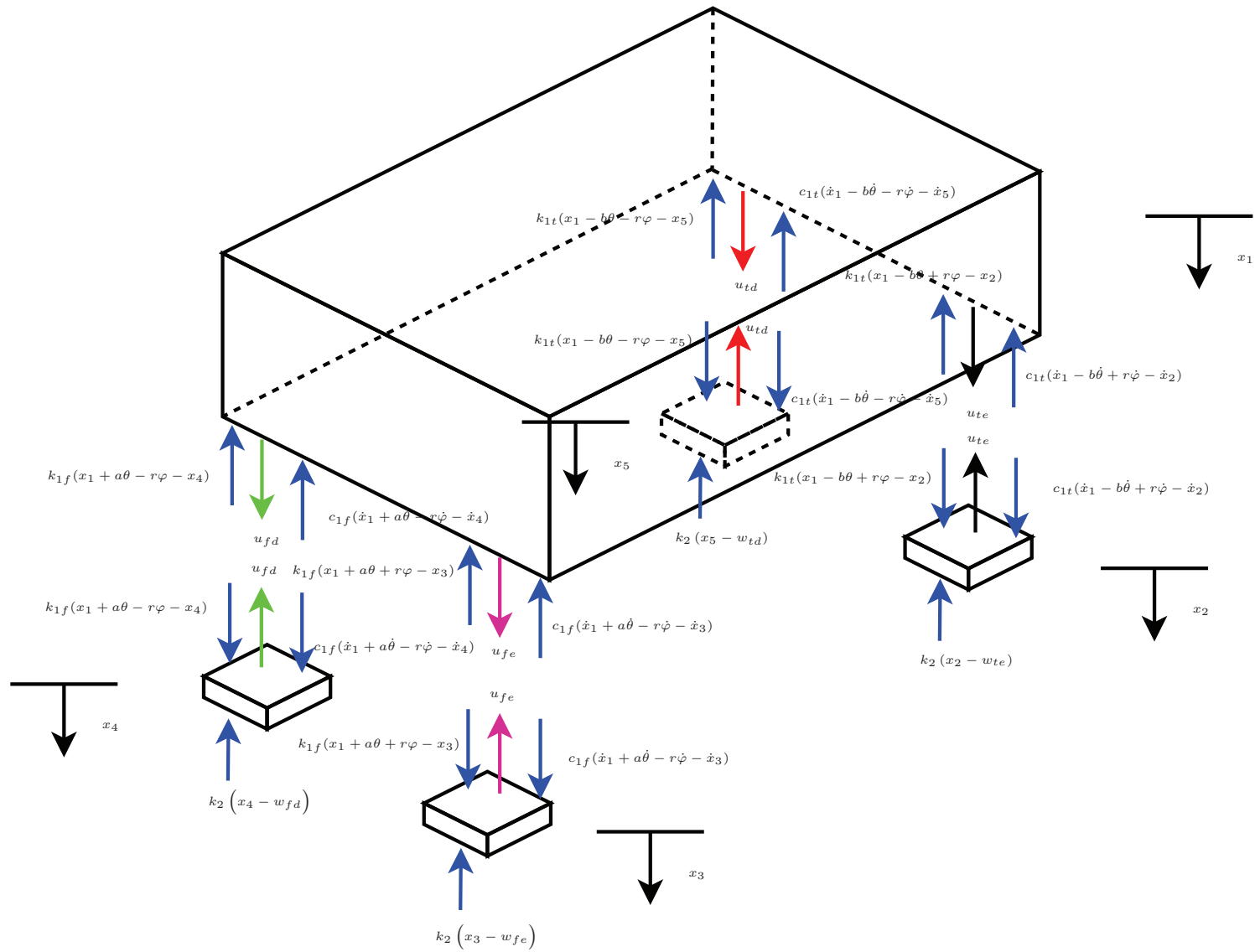


Figura 5.3: Diagrama de corpo livre para o modelo de 7 graus de liberdade (pequenas deflexões angulares).

Nesta figura tem-se:

- u_{te}, u_{fe}, u_{fd} e u_{td} são forças que os atuadores exercem;
- w_{te}, w_{fe}, w_{fd} e w_{td} são deslocamentos devido às irregularidades da pista.

Baseado na Figura 5.3, pode-se escrever as equações dinâmicas do sistema. Para a massa m_1 é possível aplicar a segunda lei de Newton, obtendo três equações:

$$\begin{aligned} u_{te}b + u_{td}b - u_{fe}a - u_{fd}a &= I\ddot{\theta} + (2c_{1f}a - 2c_{1t}b)\dot{x}_1 + c_{1t}b\dot{x}_2 - c_{1f}a\dot{x}_3 + \\ &- c_{1f}a\dot{x}_4 + c_{1t}b\dot{x}_5 + (2c_{1f}a^2 + 2c_{1t}b^2)\dot{\theta} + \\ &+ (2k_{1f}a - 2k_{1t}b)x_1 + k_{1t}bx_2 - k_{1f}ax_3 + \\ &- k_{1f}ax_4 + k_{1t}bx_5 + (2k_{1f}a^2 + 2k_{1t}b^2)\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{te}r - u_{td}r + u_{fe}r - u_{fd}r &= J\ddot{\varphi} - c_{1t}r\dot{x}_2 - c_{1f}r\dot{x}_3 + c_{1f}r\dot{x}_4 + c_{1t}r\dot{x}_5 + (2c_{1f} + 2c_{1t})r^2\dot{\varphi} + \\ &- k_{1t}rx_2 - k_{1f}rx_3 + k_{1f}rx_4 + k_{1t}rx_5 + (2k_{1f} + 2k_{1t})r^2\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{te} + u_{fe} + u_{fd} + u_{td} &= m_1\ddot{x}_1 + (2c_{1f} + 2c_{1t})\dot{x}_1 - c_{1t}\dot{x}_2 - c_{1f}\dot{x}_3 - c_{1f}\dot{x}_4 - c_{1t}\dot{x}_5 + \\ &+ (2c_{1f}a - 2c_{1t}b)\dot{\theta} + (2k_{1f} + 2k_{1t})x_1 - k_{1t}x_2 - k_{1f}x_3 - k_{1f}x_4 - \\ &+ k_{1t}x_5 + (2k_{1f}a - 2k_{1t}b)\theta. \end{aligned}$$

Aplicando a segunda lei de Newton para a massa m_2 , tem-se:

$$\begin{aligned} -u_{te} + k_2w_{te} &= m_2\ddot{x}_2 - c_{1t}\dot{x}_1 + c_{1t}\dot{x}_2 + c_{1t}b\dot{\theta} - c_{1t}r\dot{\varphi} + \\ &- k_{1t}x_1 + (k_{1t} + k_2)x_2 + k_{1t}b\theta - k_{1t}r\varphi. \end{aligned}$$

Aplicando a segunda lei de Newton para a massa m_3 , tem-se:

$$\begin{aligned} -u_{fe} + k_2w_{fe} &= m_3\ddot{x}_3 - c_{1f}\dot{x}_1 + c_{1f}\dot{x}_3 - c_{1f}a\dot{\theta} - c_{1f}r\dot{\varphi} + \\ &- k_{1f}x_1 + (k_{1f} + k_2)x_3 - k_{1f}a\theta - k_{1f}r\varphi. \end{aligned}$$

Aplicando a segunda lei de Newton para a massa m_4 , tem-se:

$$\begin{aligned} -u_{fd} + k_2w_{fd} &= m_4\ddot{x}_4 - c_{1f}\dot{x}_1 + c_{1f}\dot{x}_4 - c_{1f}a\dot{\theta} + c_{1f}r\dot{\varphi} + \\ &- k_{1f}x_1 + (k_{1f} + k_2)x_4 - k_{1f}a\theta + k_{1f}r\varphi. \end{aligned}$$

Aplicando a segunda lei de Newton para a massa m_5 , tem-se:

$$\begin{aligned} -u_{td} + k_2 w_{td} = & m_5 \ddot{x}_5 - c_{1t} \dot{x}_1 + c_{1t} \dot{x}_5 + c_{1t} b \dot{\theta} + c_{1t} r \dot{\varphi} + \\ & -k_{1t} x_1 + (k_{1t} + k_2) x_5 + k_{1t} b \theta + k_{1t} r \varphi. \end{aligned}$$

Colocando as equações na forma matricial, tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2c_{1f} + 2c_{1t} & -c_{1t} & -c_{1f} & -c_{1f} & -c_{1t} & 2(c_{1f}a - c_{1t}b) & 0 \\ -c_{1t} & c_{1t} & 0 & 0 & 0 & c_{1t}b & -c_{1t}r \\ -c_{1f} & 0 & c_{1f} & 0 & 0 & -c_{1f}a & -c_{1f}r \\ -c_{1f} & 0 & 0 & c_{1f} & 0 & -c_{1f}a & c_{1f}r \\ -c_{1t} & 0 & 0 & 0 & c_{1t} & c_{1t}b & c_{1t}r \\ 2(c_{1f}a - c_{1t}b) & c_{1t}b & -c_{1f}a & -c_{1f}a & c_{1t}b & 2(c_{1f}a^2 + c_{1t}b^2) & 0 \\ 0 & -c_{1t}r & -c_{1f}r & c_{1f}r & c_{1t}r & 0 & (2c_{1f} + 2c_{1t})r^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2k_{1f} + 2k_{1t} & -k_{1t} & -k_{1f} & -k_{1f} & -k_{1t} & 2(k_{1f}a - k_{1t}b) & 0 \\ -k_{1t} & k_{1t} + k_2 & 0 & 0 & 0 & k_{1t}b & -k_{1t}r \\ -k_{1f} & 0 & k_{1f} + k_2 & 0 & 0 & -k_{1f}a & -k_{1f}r \\ -k_{1f} & 0 & 0 & k_{1f} + k_2 & 0 & -k_{1f}a & k_{1f}r \\ -k_{1t} & 0 & 0 & 0 & k_{1t} + k_2 & k_{1t}b & k_{1t}r \\ 2(k_{1f}a - k_{1t}b) & k_{1t}b & -k_{1f}a & -k_{1f}a & k_{1t}b & 2(k_{1f}a^2 + k_{1t}b^2) & 0 \\ 0 & -k_{1t}r & -k_{1f}r & k_{1f}r & k_{1t}r & 0 & (2k_{1f} + 2k_{1t})r^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} u_{te} + u_{fe} + u_{fd} + u_{td} \\ -u_{te} + k_2 w_{te} \\ -u_{fe} + k_2 w_{fe} \\ -u_{fd} + k_2 w_{fd} \\ -u_{td} + k_2 w_{td} \\ u_{te}b - u_{fe}a - u_{fd}a + u_{td}b \\ u_{te}r + u_{fe}r - u_{fd}r - u_{td}r \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}}.$$

Com a equação de movimento acima é possível obter a mesma na forma de estados, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u},$$

onde:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \left\{ \begin{matrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dot{x}_4 & \dot{x}_5 & \dot{x}_6 & \dot{x}_7 & \dot{x}_8 & \dot{x}_9 & \dot{x}_{10} & \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dot{x}_{13} & \dot{x}_{14} \end{matrix} \right\};$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{R1} & \mathbf{A}_{R2} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{R}1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2k_{1f}-2k_{1t}}{m_1} & \frac{k_{1t}}{m_1} & \frac{k_{1f}}{m_1} & \frac{k_{1f}}{m_1} & \frac{k_{1t}}{m_1} & \frac{-2k_{1f}a+2k_{1t}b}{m_1} & 0 \\ \frac{k_{1t}}{m_2} & \frac{-k_{1t}-k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-k_{1t}b}{m_2} & \frac{k_{1t}r}{m_2} \\ \frac{k_{1f}}{m_2} & 0 & \frac{-k_{1f}-k_2}{m_2} & 0 & 0 & \frac{k_{1f}a}{m_2} & \frac{k_{1f}r}{m_2} \\ \frac{k_{1f}}{m_2} & 0 & 0 & \frac{-k_{1f}-k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_{1f}a}{m_2} & \frac{-k_{1f}r}{m_2} \\ \frac{k_{1t}}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-k_{1t}-k_2}{m_2} & \frac{-k_{1t}b}{m_2} & \frac{-k_{1t}r}{m_2} \\ \frac{-2k_{1f}a+2k_{1t}b}{I} & \frac{-k_{1t}b}{I} & \frac{k_{1f}a}{I} & \frac{k_{1f}a}{I} & \frac{-k_{1t}b}{I} & \frac{-2k_{1f}a^2-2k_{1t}b^2}{I} & 0 \\ 0 & \frac{k_{1t}r}{J} & \frac{k_{1f}r}{J} & \frac{-k_{1f}r}{J} & \frac{-k_{1t}r}{J} & 0 & \frac{2k_{1f}r^2+2k_{1t}r^2}{J} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{R2} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{-2c_{1f}-2c_{1t}}{m_1} & \frac{c_{1t}}{m_1} & \frac{c_{1f}}{m_1} & \frac{c_{1f}}{m_1} & \frac{c_{1t}}{m_1} & \frac{-2c_{1f}a+2c_{1t}b}{m_1} & 0 \\
\frac{c_{1t}}{m_2} & \frac{-c_{1t}-c_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-c_{1t}b}{m_2} & \frac{c_{1t}r}{m_2} \\
\frac{c_{1f}}{m_2} & 0 & \frac{-c_{1f}-c_2}{m_2} & 0 & 0 & \frac{c_{1f}a}{m_2} & \frac{c_{1f}r}{m_2} \\
\frac{c_{1f}}{m_2} & 0 & 0 & \frac{-c_{1f}-c_2}{m_2} & 0 & \frac{c_{1f}a}{m_2} & \frac{-c_{1f}r}{m_2} \\
\frac{c_{1t}}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-c_{1t}-c_2}{m_2} & \frac{-c_{1t}b}{m_2} & \frac{-c_{1t}r}{m_2} \\
\frac{-2c_{1f}a+2c_{1t}b}{I} & \frac{-c_{1t}b}{I} & \frac{c_{1f}a}{I} & \frac{c_{1f}a}{I} & \frac{-c_{1t}b}{I} & \frac{-2c_{1f}a^2-2c_{1t}b^2}{I} & 0 \\
0 & \frac{c_{1t}r}{J} & \frac{c_{1f}r}{J} & \frac{-c_{1f}r}{J} & \frac{-c_{1t}r}{J} & 0 & \frac{2c_{1f}r^2+2c_{1t}r^2}{J}
\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{Bmatrix}; \mathbf{B}_1 \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{u_{td} + u_{te} + u_{fe} + u_{fd}}{m_1} \\ \frac{-u_{te}}{m_2} \\ \frac{-u_{fe}}{m_3} \\ \frac{-u_{fd}}{m_4} \\ \frac{-u_{td}}{m_5} \\ \frac{u_{te}b - u_{fe}a - u_{fd}a + u_{td}b}{I} \\ \frac{u_{te}r + u_{fe}r - u_{fd}r - u_{td}r}{J} \end{Bmatrix}; \mathbf{B}_2 \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2 w_{te}}{m_2} \\ \frac{k_2 w_{fe}}{m_3} \\ \frac{k_2 w_{fd}}{m_4} \\ \frac{k_2 w_{td}}{m_5} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

onde:

- x_1 corresponde ao deslocamento vertical do veículo;
- x_2 corresponde ao deslocamento vertical da roda traseira esquerda;
- x_3 corresponde ao deslocamento vertical da roda dianteira esquerda;
- x_4 corresponde ao deslocamento vertical da roda dianteira direita;
- x_5 corresponde ao deslocamento vertical da roda traseira esquerda;
- x_6 corresponde ao deslocamento angular do veículo, ou seja θ ;
- x_7 corresponde ao deslocamento angular do veículo, ou seja φ ;
- x_8 corresponde à velocidade vertical do veículo, ou seja \dot{x}_1 ;
- x_9 corresponde à velocidade vertical da roda traseira esquerda, ou seja \dot{x}_2 ;
- x_{10} corresponde à velocidade vertical da roda dianteira esquerda, ou seja \dot{x}_3 ;
- x_{11} corresponde à velocidade vertical da roda dianteira direita, ou seja \dot{x}_4 ;
- x_{12} corresponde à velocidade vertical da roda traseira esquerda, ou seja \dot{x}_5 ;
- x_{13} corresponde à velocidade angular do veículo, ou seja $\dot{\theta}$;
- x_{14} corresponde à velocidade angular do veículo, ou seja $\dot{\varphi}$.

Anexo B - Dedução da Equação (2.31)

O resultado de (2.31) pode ser verificado aplicando-se o complemento de Schur. A equação (2.31) é reescrita abaixo:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} & \tilde{C} & \tilde{P}\tilde{B} \\ \tilde{C} & -I & \tilde{D} \\ \tilde{B}'\tilde{P} & \tilde{D}' & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix} < 0.$$

Aplicando-se o complemento de Shur, é possível obter:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} & \tilde{C}' \\ \tilde{C} & -I \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \tilde{P}\tilde{B} \\ \tilde{D} \end{bmatrix} (-\gamma^{-2}I) \begin{bmatrix} \tilde{B}'\tilde{P} & \tilde{D}' \end{bmatrix}.$$

Efetuando o produto de matrizes, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} & \tilde{C} \\ \tilde{C} & -I \end{bmatrix} < \gamma^{-2} \begin{bmatrix} \tilde{P}\tilde{B}\tilde{B}'\tilde{P} & \tilde{P}\tilde{B}\tilde{D}' \\ \tilde{D}'\tilde{B}'\tilde{P} & \tilde{D}\tilde{D}' \end{bmatrix}.$$

Aplicando Schur novamente na equação acima, é possível obter [25]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{P}\tilde{B}\tilde{B}'\tilde{P} & \tilde{C}' + \tilde{P}\tilde{B}\tilde{D}'\gamma^{-2} \\ \tilde{C} + \tilde{D}'\tilde{B}'\tilde{P}\gamma^{-2} & -I + \tilde{D}\tilde{D}'\gamma^{-2} \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow \tilde{A}'\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{P}\tilde{B}\tilde{B}'\tilde{P} = \\ -(\tilde{C}' + \tilde{P}\tilde{B}\tilde{D}'\gamma^{-2})(\tilde{C} + \tilde{D}\tilde{B}'\tilde{P}\gamma^{-2})(I + \gamma^{-2}\tilde{D}\tilde{D}').$$

Conclui-se então que [25]:

$$\tilde{A}'\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} + (\tilde{C}'\tilde{D} + \tilde{P}\tilde{B})\gamma^{-2}(\tilde{D}'\tilde{C} + \tilde{B}'\tilde{P}) + \tilde{C}'\tilde{C} < 0.$$

Anexo C - Norma H_∞

O projeto H_∞ consiste em reduzir a norma infinito da função ou matriz de transferência da saída de desempenho com respeito às entradas exógenas, o que representa minimizar o pico de resposta em frequência do sistema em malha fechada [4]. Vale especificar que no caso de sistemas multivariáveis o diagrama da resposta em frequência se refere ao diagrama de valores singulares, e no caso de sistemas de entrada única ao diagrama de Bode da amplitude.

A norma H_∞ é definida como segue:

- Norma H_∞ da função de transferência $\mathbf{G}(s)$ (SISO) é: $\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_w |\mathbf{G}(jw)|$;
- Norma H_∞ da função de transferência $\mathbf{G}(s)$ (MIMO) é: $\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_w \sigma_{max}(\mathbf{G}(jw))$,

onde $\sigma_{max}(\mathbf{G}(jw))$ representa os valores singulares da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$, e é definido como:

$$\sigma_{max}(\mathbf{G}(jw)) = \sqrt{\lambda_{max} \mathbf{G}'(jw) \mathbf{G}(jw)},$$

onde λ_{max} denota o maior autovalor [4].

Anexo D - Programas Utilizados

Programa principal para 2 graus de liberdade:

```
clc
close all
clear all

\% 2 graus de liberdade:
mn=375; cnf=1000; cnt=1100; c2=0; kn=190000;

\%=====
\%Caso 1
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=1.15*kn;
[A1,B11,B21,C11,D111,D121]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{1}=ss(A1,[B11 B21],[C11],[D111 D121]);
P{1}.InputName={'wf','uf'}; P{1}.OutputName={'a1','khpi'};
\%=====
\%Caso 2
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=1.15*kn;
[A2,B12,B22,C12,D112,D122]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{2}=ss(A2,[B12 B22],[C12],[D112 D122]);
P{2}.InputName={'wf','uf'}; P{2}.OutputName={'a1','khpi'};
\%=====
\%Caso 3
```

```

\%=====
m1=1.15*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=1.15*kn;
[A3,B13,B23,C13,D113,D123]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{3}=ss(A3,[B13 B23],[C13],[D113 D123]);
P{3}.InputName={'wf','uf'}; P{3}.OutputName={'a1','khpi'};
\%=====
\%Caso 4
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=1.15*kn;
[A4,B14,B24,C14,D114,D124]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{4}=ss(A4,[B14 B24],[C14],[D114 D124]);
P{4}.InputName={'wf','uf'}; P{4}.OutputName={'a1','khpi'};
\%=====
\%Caso 5
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=0.85*kn;
[A5,B15,B25,C15,D115,D125]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{5}=ss(A5,[B15 B25],[C15],[D115 D125]);
P{5}.InputName={'wf','uf'}; P{5}.OutputName={'a1','khpi'};
\%=====
\%Caso 6
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=0.85*kn;
[A6,B16,B26,C16,D116,D126]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{6}=ss(A6,[B16 B26],[C16],[D116 D126]);
P{6}.InputName={'wf','uf'}; P{6}.OutputName={'a1','khpi'};
\%=====
\%Caso 7
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=0.85*kn;
[A7,B17,B27,C17,D117,D127]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{7}=ss(A7,[B17 B27],[C17],[D117 D127]);
P{7}.InputName={'wf','uf'}; P{7}.OutputName={'a1','khpi'};
\%=====
\%Caso 8
\%=====

```



```

m1=0.85*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=0.85*kn;
[A8,B18,B28,C18,D118,D128]=matrices(m1,k2,c1f,c1t);
P{8}=ss(A8,[B18 B28],[C18],[D118 D128]);
P{8}.InputName={'wf','uf'}; P{8}.OutputName={'a1','khpi'};

\%=====
\%projeto do controlador
\%=====

n=size(A1,1);
nw=size(B11,2); \%número de entradas exogenas
nu=size(B21,2); \%número de entradas de controle

ny=1; \%número de saidas medidas

\%=====
\%Função de ponderação
\%=====

N = length(P);
masys=P;
for a=1:N
    numa1=[1 314.2 987];
    dena1=[1 43.98 987];
    [Aa1,Ba1,Ca1,Da1]=tf2ss(numa1,dena1);
    Wa1=ss(Aa1,Ba1,Ca1,Da1);
    numkhpi=[1 50];
    denkhpi=[1 1];
    [Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi]=tf2ss(numkhpi,denkhpi);
    Wkhpi=ss(Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi);
    Wuf=1e-3*ss(1);
    Wa1.InputName='a1'; Wa1.OutputName='za1';
    Wuf.InputName='uf'; Wuf.OutputName='zuf';
    Wkhpi.InputName='khpi'; Wkhpi.OutputName='zkhpi';
    G{a}=connect(P{a},Wuf,Wa1,Wkhpi,{'wf','uf'},{'za1','zkhpi','zuf','a1'});
    G{a} = canon(G{a},'modal');

```

```

end
nz=size(G{1},1)-1;
for i = 1:N
    [A,B,C,D] = ssdata(G{i});
    [s,e] = size(D);
    A=G{i}.a; B=G{i}.b; C=G{i}.c; D=G{i}.d;
    B1=B(:,1:nw); B2=B(:,nw+1:end);
    C1=C(1:nz,:); C2=C(nz+1:end,:);
    D11=D(1:nz,1:nw); D12=D(1:nz,nw+1:end);
    D21=D(nz+1:end,1:nw); D22=D(nz+1:end,nw+1:end);
end
n=size(A,1);
nw=size(B1,2); \%número de entradas exogenas
nu=size(B2,2); \%número de entradas de controle
ny=1; \%número de saidas medidas
nz=size(G{1},1)-1;

\%=====
\%Controlador
\%=====

K1=Hinfpolitopico(G,n,ny,nu,nw,nz);
K1.InputName='a1'; K1.OutputName={'uf'};
CL1=connect(masys{1},K1,{'wf'},{'a1','khpi','uf'});
damp(CL1)
CL2=connect(masys{2},K1,{'wf'},{'a1','khpi','uf'});
damp(CL2)
CL3=connect(masys{3},K1,{'wf'},{'a1','khpi','uf'});
damp(CL3)
CL4=connect(masys{4},K1,{'wf'},{'a1','khpi','uf'});
damp(CL4)
CL5=connect(masys{5},K1,{'wf'},{'a1','khpi','uf'});
damp(CL5)
CL6=connect(masys{6},K1,{'wf'},{'a1','khpi','uf'});
damp(CL6)
CL7=connect(masys{7},K1,{'wf'},{'a1','khpi','uf'});

```

```

damp(CL7)
CL8=connect(masys{8},K1,{ 'wf' }, { 'a1', 'khpi', 'uf' });
damp(CL8)

\%=====
\%Caso nominal
\%=====
m1=mn;c1f=cnf;c1t=cnt;k2=kn;
[An,B1n,B2n,C1n,D11n,D12n]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
Pn=ss(An,[B1n B2n],[C1n],[D11n D12n]);
Pn.InputName={ 'wf', 'uf' }; Pn.OutputName={ 'a1', 'khpi' };
CLn=connect(Pn,K1,{ 'wf' }, { 'a1', 'khpi', 'uf' });
damp(CLn)
P{9}=Pn;
masys{9}=Pn;
CL9=CLn;

Programa principal para 4 graus de liberdade:

clc
close all
clear all

mn=750; cnf=1000; cnt=1100; c2=0; kn=190000;

\%=====
\%Caso 1
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=1.15*kn;
[A1,B11,B21,C11,D111,D121]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{1}=ss(A1,[B11 B21],[C11],[D111 D121]);
P{1}.InputName={ 'wf', 'wt', 'uf', 'ut' }; P{1}.OutputName={ 'a1', 'theta', 'khpi' };
\%=====
\%Caso 2
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=1.15*kn;

```

```

[A2,B12,B22,C12,D112,D122]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{2}=ss(A2,[B12 B22],[C12],[D112 D122]);
P{2}.InputName={'wf','wt','uf','ut'}; P{2}.OutputName={'a1','theta','khpi'};
\%=====
\%Caso 3
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=1.15*kn;
[A3,B13,B23,C13,D113,D123]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{3}=ss(A3,[B13 B23],[C13],[D113 D123]);
P{3}.InputName={'wf','wt','uf','ut'}; P{3}.OutputName={'a1','theta','khpi'};
\%=====
\%Caso 4
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=1.15*kn;
[A4,B14,B24,C14,D114,D124]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{4}=ss(A4,[B14 B24],[C14],[D114 D124]);
P{4}.InputName={'wf','wt','uf','ut'}; P{4}.OutputName={'a1','theta','khpi'};
\%=====
\%Caso 5
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=0.85*kn;
[A5,B15,B25,C15,D115,D125]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{5}=ss(A5,[B15 B25],[C15],[D115 D125]);
P{5}.InputName={'wf','wt','uf','ut'}; P{5}.OutputName={'a1','theta','khpi'};
\%=====
\%Caso 6
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=0.85*kn;
[A6,B16,B26,C16,D116,D126]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{6}=ss(A6,[B16 B26],[C16],[D116 D126]);
P{6}.InputName={'wf','wt','uf','ut'}; P{6}.OutputName={'a1','theta','khpi'};
\%=====
\%Caso 7
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=0.85*kn;
[A7,B17,B27,C17,D117,D127]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);

```

```

P{7}=ss(A7,[B17 B27],[C17],[D117 D127]);
P{7}.InputName={'wf','wt','uf','ut'}; P{7}.OutputName={'a1','theta','khpi'};
\%=====
\%Caso 8
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=0.85*kn;
[A8,B18,B28,C18,D118,D128]=matrices(m1,k2,c1f,c1t);
P{8}=ss(A8,[B18 B28],[C18],[D118 D128]);
P{8}.InputName={'wf','wt','uf','ut'}; P{8}.OutputName={'a1','theta','khpi'};

\%=====
\%projeto do controlador
\%=====

n=size(A1,1);
nw=size(B11,2); \%número de entradas exogenas
nu=size(B21,2); \%número de entradas de controle
ny=1; \%número de saidas medidas

\%=====
\%Função de ponderação
\%=====

N = length(P);
masys=P;
for a=1:N

    numal=[1 314.2 987];
    denal=[1 43.98 987];
    [Aa1,Ba1,Ca1,Da1]=tf2ss(numal,denal);
    Wa1=ss(Aa1,Ba1,Ca1,Da1);

    numtheta=[1 50.27 25.27];
    denttheta=[1 7.037 25.27];
    [Atheta,Btheta,Ctheta,Dtheta]=tf2ss(numtheta,denttheta);
    Wtheta=ss(Atheta,Btheta,Ctheta,Dtheta);

```

```

numkhpi=[1 50];
denkhpi=[1 1];
[Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi]=tf2ss(numkhpi,denkhpi);
Wkhpi=ss(Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi);

krp=1;
Wut=krp*1e-3*ss(1);
Wuf=Wut;

Wal.InputName='a1'; Wal.OutputName='za1';
Wtheta.InputName='theta'; Wtheta.OutputName='ztheta';
Wut.InputName='ut'; Wut.OutputName='zut';
Wuf.InputName='uf'; Wuf.OutputName='zuf';
Wkhpi.InputName='khpi'; Wkhpi.OutputName='zkhpi';

G{a}=connect(P{a},Wuf,Wut,Wal,Wtheta,Wkhpi,{ 'wf','wt','uf','ut'},...
{ 'za1','ztheta','zkhpi','zut','zuf','a1'});
G{a} = canon(G{a},'modal');

end
nz=size(G{1},1)-1;
for i = 1:N

    [A,B,C,D] = ssdata(G{i});
    [s,e] = size(D);
    A=G{i}.a; B=G{i}.b; C=G{i}.c; D=G{i}.d;
    B1=B(:,1:nw); B2=B(:,nw+1:end);
    C1=C(1:nz,:); C2=C(nz+1:end,:);
    D11=D(1:nz,1:nw); D12=D(1:nz,nw+1:end);
    D21=D(nz+1:end,1:nw); D22=D(nz+1:end,nw+1:end);
end
n=size(A,1);
nw=size(B1,2); \%número de entradas exogenas
nu=size(B2,2); \%número de entradas de controle
ny=1; \%número de saidas medidas

```

```

nz=size(G{1},1)-1;

\%=====
\%Controlador
\%=====

K1=Hinfpolitopico(G,n,ny,nu,nw,nz);
K1.InputName='a1'; K1.OutputName={'uf','ut'};
CL1=connect(masys{1},K1,{'wf','wt'},{'a1','theta','khpi','uf','ut'});
CL1=canon(CL1,'modal');
damp(CL1)
CL2=connect(masys{2},K1,{'wf','wt'},{'a1','theta','khpi','uf','ut'});
CL2=canon(CL2,'modal');
damp(CL2)
CL3=connect(masys{3},K1,{'wf','wt'},{'a1','theta','khpi','uf','ut'});
CL3=canon(CL3,'modal');
damp(CL3)
CL4=connect(masys{4},K1,{'wf','wt'},{'a1','theta','khpi','uf','ut'});
CL4=canon(CL4,'modal');
damp(CL4)
CL5=connect(masys{5},K1,{'wf','wt'},{'a1','theta','khpi','uf','ut'});
CL5=canon(CL5,'modal');
damp(CL5)
CL6=connect(masys{6},K1,{'wf','wt'},{'a1','theta','khpi','uf','ut'});
CL6=canon(CL6,'modal');
damp(CL6)
CL7=connect(masys{7},K1,{'wf','wt'},{'a1','theta','khpi','uf','ut'});
CL7=canon(CL7,'modal');
damp(CL7)
CL8=connect(masys{8},K1,{'wf','wt'},{'a1','theta','khpi','uf','ut'});
CL8=canon(CL8,'modal');
damp(CL8)

\%=====
\%Caso nominal
\%=====

```

```

m1=mn;c1f=cnf;c1t=cnt;k2=kn;
[An,B1n,B2n,C1n,D11n,D12n]=matrices(m1,k2,c1f,c1t);
Pn=ss(An,[B1n B2n],[C1n],[D11n D12n]);
Pn.InputName={'wf','wt','uf','ut'}; Pn.OutputName={'a1','theta','khpi'};
CLn=connect(Pn,K1,{'wf','wt'},{'a1','theta','khpi','uf','ut'});
damp(CLn)
P{9}=Pn;
masys{9}=Pn;
CL9=CLn;

```

Programa principal para 7 graus de liberdade:

```

clc
close all
clear all

```

```

mn=1500; cnf=1000; cnt=1100; c2=0; kn=190000;

```

```

\%=====
\%Caso 1
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=1.15*kn;
[A1,B11,B21,C11,D111,D121]=matrices(m1,k2,c1f,c1t);
P{1}=ss(A1,[B11 B21],[C11],[D111 D121]);
P{1}.InputName={'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
P{1}.OutputName={'a1','theta','phi','khpi'};
\%=====
\%Caso 2
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=1.15*kn;
[A2,B12,B22,C12,D112,D122]=matrices(m1,k2,c1f,c1t);
P{2}=ss(A2,[B12 B22],[C12],[D112 D122]);
P{2}.InputName={'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
P{2}.OutputName={'a1','theta','phi','khpi'};
\%=====
\%Caso 3

```



```

\%=====
m1=1.15*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=1.15*kn;
[A3,B13,B23,C13,D113,D123]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{3}=ss(A3,[B13 B23],[C13],[D113 D123]);
P{3}.InputName={'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
P{3}.OutputName={'a1','theta','phi','khpi'};
\%=====
\%Caso 4
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=1.15*kn;
[A4,B14,B24,C14,D114,D124]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{4}=ss(A4,[B14 B24],[C14],[D114 D124]);
P{4}.InputName={'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
P{4}.OutputName={'a1','theta','phi','khpi'};
\%=====
\%Caso 5
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=0.85*kn;
[A5,B15,B25,C15,D115,D125]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{5}=ss(A5,[B15 B25],[C15],[D115 D125]);
P{5}.InputName={'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
P{5}.OutputName={'a1','theta','phi','khpi'};
\%=====
\%Caso 6
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=1.15*cnf;c1t=1.15*cnt;k2=0.85*kn;
[A6,B16,B26,C16,D116,D126]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{6}=ss(A6,[B16 B26],[C16],[D116 D126]);
P{6}.InputName={'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
P{6}.OutputName={'a1','theta','phi','khpi'};
\%=====
\%Caso 7
\%=====
m1=1.15*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=0.85*kn;
[A7,B17,B27,C17,D117,D127]=matrizes(m1,k2,c1f,c1t);
P{7}=ss(A7,[B17 B27],[C17],[D117 D127]);

```

```

P{7}.InputName={'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
P{7}.OutputName={'a1','theta','phi','khpi'};

\%=====
\%Caso 8
\%=====
m1=0.85*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=0.85*kn;
[A8,B18,B28,C18,D118,D128]=matrices(m1,k2,c1f,c1t);
P{8}=ss(A8,[B18 B28],[C18],[D118 D128]);
P{8}.InputName={'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
P{8}.OutputName={'a1','theta','phi','khpi'};

\%=====
\%projeto do controlador
\%=====

n=size(A1,1);
nw=size(B11,2); \%número de entradas exogenas
nu=size(B21,2); \%número de entradas de controle
ny=1; \%número de saidas medidas

\%=====
\%Função de ponderação
\%=====

N = length(P);
masys=P;
for a=1:N
    numal=[1 314.2 987];
    denal=[1 43.98 987];
    [Aa1,Ba1,Ca1,Da1]=tf2ss(numal,denal);
    Wa1=ss(Aa1,Ba1,Ca1,Da1);
    numtheta=[1 50.27 25.27];
    denttheta=[1 7.037 25.27];
    [Atheta,Btheta,Ctheta,Dtheta]=tf2ss(numtheta,denttheta);
    Wtheta=ss(Atheta,Btheta,Ctheta,Dtheta);
    Wphi=Wtheta;

```

```

numkhpi=[1 50];
denkhpi=[1 1];
[Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi]=tf2ss(numkhpi,denkhpi);
Wkhpi=ss(Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi);
krp=1;
Wu_usando=krp*1e-3*ss(1);
Wute=Wu_usando;
Wufe=Wu_usando;
Wufd=Wu_usando;
Wutd=Wu_usando;
Wal.InputName='a1'; Wal.OutputName='za1';
Wtheta.InputName='theta'; Wtheta.OutputName='ztheta';
Wphi.InputName='phi'; Wphi.OutputName='zphi';
Wute.InputName='ute'; Wute.OutputName='zute';
Wufe.InputName='ufe'; Wufe.OutputName='zufe';
Wufd.InputName='ufd'; Wufd.OutputName='zufd';
Wutd.InputName='utd'; Wutd.OutputName='zutd';
Wkhpi.InputName='khpi'; Wkhpi.OutputName='zkhpi';
G{a}=connect(P{a},Wufd,Wufe,Wutd,Wute,Wal,Wtheta,Wphi,Wkhpi,...
{'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'},...
{'za1','ztheta','zphi','zkhpi','zute','zufe','zufd','zutd','a1'});
G{a} = canon(G{a},'modal');
end
nz=size(G{a},1)-1;
for i = 1:N
    [A,B,C,D] = ssdata(G{i});
    [s,e] = size(D);
    A=G{i}.a; B=G{i}.b; C=G{i}.c; D=G{i}.d;
    B1=B(:,1:nw); B2=B(:,nw+1:end);
    C1=C(1:nz,:); C2=C(nz+1:end,:);
    D11=D(1:nz,1:nw); D12=D(1:nz,nw+1:end);
    D21=D(nz+1:end,1:nw); D22=D(nz+1:end,nw+1:end);
end
n=size(A,1);
nw=size(B1,2); \%número de entradas exogenas
nu=size(B2,2); \%número de entradas de controle

```

```

ny=1; \ %número de saidas medidas
nz=size(G{1},1)-1;

\%=====
\%Controlador
\%=====
K1=Hinfpolitopico(G,n,ny,nu,nw,nz);
K1.InputName='a1'; K1.OutputName={'ufd','ufe','utd','ute'};

CL1=connect(masys{1},K1,{'wfd','wfe','wtd','wte','Mc'},...
{'a1','theta','phi','khpi','ufd','ufe','utd','ute'});
CL1=canon(CL1,'modal');
damp(CL1)
CL2=connect(masys{2},K1,{'wfd','wfe','wtd','wte','Mc'},...
{'a1','theta','phi','khpi','ufd','ufe','utd','ute'});
CL2=canon(CL2,'modal');
damp(CL2)
CL3=connect(masys{3},K1,{'wfd','wfe','wtd','wte','Mc'},...
{'a1','theta','phi','khpi','ufd','ufe','utd','ute'});
CL3=canon(CL3,'modal');
damp(CL3)
CL4=connect(masys{4},K1,{'wfd','wfe','wtd','wte','Mc'},...
{'a1','theta','phi','khpi','ufd','ufe','utd','ute'});
CL4=canon(CL4,'modal');
damp(CL4)
CL5=connect(masys{5},K1,{'wfd','wfe','wtd','wte','Mc'},...
{'a1','theta','phi','khpi','ufd','ufe','utd','ute'});
CL5=canon(CL5,'modal');
damp(CL5)
CL6=connect(masys{6},K1,{'wfd','wfe','wtd','wte','Mc'},...
{'a1','theta','phi','khpi','ufd','ufe','utd','ute'});
CL6=canon(CL6,'modal');
damp(CL6)
CL7=connect(masys{7},K1,{'wfd','wfe','wtd','wte','Mc'},...
{'a1','theta','phi','khpi','ufd','ufe','utd','ute'});
CL7=canon(CL7,'modal');

```

```

damp(CL7)
CL8=connect(masys{8},K1,{ 'wfd','wfe','wtd','wte','Mc'},...
{ 'a1','theta','phi','khpi','ufd','ufe','utd','ute'});
CL8=canon(CL8,'modal');
damp(CL8)

\%=====
\%Caso nominal
\%=====

m1=mn;clf=cnf;clt=cnt;k2=kn;
[An,B1n,B2n,C1n,D11n,D12n]=matrizes(m1,k2,clf,clt);
Pn=ss(An,[B1n B2n],[C1n],[D11n D12n]);
Pn.InputName={ 'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
Pn.OutputName={ 'a1','theta','phi','khpi'};
CLn=connect(Pn,K1,{ 'wfd','wfe','wtd','wte','Mc'},...
{ 'a1','theta','phi','khpi','ufd','ufe','utd','ute'});
damp(CLn)
P{9}=Pn;
masys{9}=Pn;
CL9=CLn;
CL9=canon(CL9,'modal');

```

Cálculo do controlador do modelo de 2 graus de liberdade:

```

function K1=Hinfpolitopico(G,n,ny,nu,nw,nz)

\%=====
\%Controlador H infinito com incertezas politópicas
\%=====

N = length(G);

mi = sdpvar(1,1);
Y = sdpvar(n,n);
X = sdpvar(n,n);
L = sdpvar(n,ny,'full');
F = sdpvar(nu,n,'full');

```

```

M = sdpvar(n,n,'full');

LMI = set([Y eye(n);
          eye(n) X] > 0);

for i = 1:N

    [A,B,C,D] = ssdata(G{i});
    [s,e] = size(D);
    A=G{i}.a; B=G{i}.b; C=G{i}.c; D=G{i}.d;
    B1=B(:,1:nw); B2=B(:,nw+1:end);
    C1=C(1:nz,:); C2=C(nz+1:end,:);
    D11=D(1:nz,1:nw); D12=D(1:nz,nw+1:end);
    D21=D(nz+1:end,1:nw); D22=D(nz+1:end,nw+1:end);

    LMI = LMI + set([Y*A'+F'*B2'+A*Y+B2*F A+M' Y*C1'+F'*D12' B1;
                    A'+M A'*X+C2'*L'+X*A+L*C2 C1' X*B1+L*D21;
                    C1*Y+D12*F C1 -eye(nz) zeros(nz,nw);
                    B1' B1'*X+D21'*L' zeros(nw,nz) -mi*eye(nw)]<0);

end

options = sdpsettings('solver','sedumi','shift',1e-6);
d = solvesdp(LMI,mi,options)

gama = sqrt(double(mi));
X = double(X);
Y = double(Y);
L = double(L);
F = double(F);
M = double(M);

U = eye(n);
V = inv(U.')(eye(n)-X*Y);

\%=====

```

```

\%Caso nominal
\%=====
mn=375; cnf=1000; cnt=1100; c2=0; kn=190000;
m2f=59; m2t=59; m2=m2f; c2=0; k1f=35000; k1t=38000;
m1=mn; c1f=cnf; c1t=cnt; k2=kn;
[A,B1,B2,C1,D11,D12]=matrices(m1,k2,c1f,c1t);
PPn=ss(A,[B1 B2],[C1],[D11 D12]);
PPn.InputName={'wf','uf'}; PPn.OutputName={'a1','khpi'};
PP{9}=PPn;
numa1=[1 314.2 987];
dena1=[1 43.98 987];
[Aa1,Ba1,Ca1,Da1]=tf2ss(numa1,dena1);
Wa1=ss(Aa1,Ba1,Ca1,Da1);
numkhpi=[1 50];
denkhpi=[1 1];
[Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi]=tf2ss(numkhpi,denkhpi);
Wkhpi=ss(Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi);
Wuf=1e-3*ss(1);
Wa1.InputName='a1'; Wa1.OutputName='za1';
Wuf.InputName='uf'; Wuf.OutputName='zuf';
Wkhpi.InputName='khpi'; Wkhpi.OutputName='zkhpi';
GG{9}=connect(PP{9},Wuf,Wa1,Wkhpi,{'wf','uf'},{'za1','zkhpi','zuf','a1'});
GG{9} = canon(GG{9},'modal');
nz=size(GG{9},1)-1;
[A,B,C,D] = ssdata(GG{9});
[s,e] = size(D);
A=GG{9}.a; B=GG{9}.b; C=GG{9}.c; D=GG{9}.d;
B1=B(:,1:nw); B2=B(:,nw+1:end);
C1=C(1:nz,:); C2=C(nz+1:end,:);
D11=D(1:nz,1:nw); D12=D(1:nz,nw+1:end);
D21=D(nz+1:end,1:nw); D22=D(nz+1:end,nw+1:end);
Dc = zeros(nu,ny);
Cc = F*inv(V);
Bc = inv(U.)*L;
Ac = inv(U.)*(M-X*A*Y-X*B2*F-L*C2*Y)*inv(V);

```

```

Acch=Ac-Bc*D22*Cc;
Bcch=Bc-Bc*D22*Dc;
Ccch=(1-Dc*D22)*Cc;
Dcch=Dc;
eig(Acch)

```

```

Kl=ss(Acch,Bcch,Ccch,Dcch);

```

Cálculo do controlador do modelo de 4 graus de liberdade:

```

function Kl=Hinfpolitopico(G,n,ny,nu,nw,nz)

\%=====
\%Controlador H infinito com incertezas politópicas
\%=====
N = length(G);

mi = sdpvar(1,1);
Y = sdpvar(n,n);
X = sdpvar(n,n);
L = sdpvar(n,ny,'full');
F = sdpvar(nu,n,'full');
M = sdpvar(n,n,'full');

LMI = set([Y eye(n);
           eye(n) X] > 0);

for i = 1:N

    [A,B,C,D] = ssdata(G{i});
    [s,e] = size(D);
    A=G{i}.a; B=G{i}.b; C=G{i}.c; D=G{i}.d;
    B1=B(:,1:nw); B2=B(:,nw+1:end);
    C1=C(1:nz,:); C2=C(nz+1:end,:);
    D11=D(1:nz,1:nw); D12=D(1:nz,nw+1:end);
    D21=D(nz+1:end,1:nw); D22=D(nz+1:end,nw+1:end);

```



```

LMI = LMI + set([Y*A'+F'*B2'+A*Y+B2*F A+M' Y*C1'+F'*D12' B1;
                A'+M A'*X+C2'*L'+X*A+L*C2 C1' X*B1+L*D21;
                C1*Y+D12*F C1 -eye(nz) zeros(nz,nw);
                B1' B1'*X+D21'*L' zeros(nw,nz) -mi*eye(nw)]<0);

end

options = sdpsettings('solver','sedumi','shift',1e-6);
d = solvesdp(LMI,mi,options)

gama = sqrt(double(mi));
X = double(X);
Y = double(Y);
L = double(L);
F = double(F);
M = double(M);

U = eye(n);
V = inv(U.')*(eye(n)-X*Y);

\%=====
\%Caso nominal
\%=====
mn=750; cnf=1000; cnt=1100; c2=0; kn=190000;
m2f=59; m2t=59; m2=m2f; c2=0; k1f=35000; k1t=38000;
m1=mn;c1f=cnf;c1t=cnt;k2=kn;
[An,B1n,B2n,C1n,D11n,D12n]=matrices(m1,k2,c1f,c1t);
PPn=ss(An,[B1n B2n],[C1n],[D11n D12n])
PPn.InputName={'wf','wt','uf','ut'}; PPn.OutputName={'a1','theta','khpi'};
PP{9}=PPn;
numa1=[1 314.2 987];
dena1=[1 43.98 987];
[Aa1,Ba1,Ca1,Da1]=tf2ss(numa1,dena1);
Wa1=ss(Aa1,Ba1,Ca1,Da1);
numtheta=[1 50.27 25.27];

```

```

denttheta=[1 7.037 25.27];
[Atheta,Btheta,Ctheta,Dtheta]=tf2ss(numtheta,denttheta);
Wtheta=ss(Atheta,Btheta,Ctheta,Dtheta);
numkhpi=[1 50];
denkhpi=[1 1];
[Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi]=tf2ss(numkhpi,denkhpi);
Wkhpi=ss(Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi);
Wuf=1e-3*ss(1);
Wut=Wuf;
Wal.InputName='a1'; Wal.OutputName='za1';
Wtheta.InputName='theta'; Wtheta.OutputName='ztheta';
Wut.InputName='ut'; Wut.OutputName='zut';
Wuf.InputName='uf'; Wuf.OutputName='zuf';
Wkhpi.InputName='khpi'; Wkhpi.OutputName='zkhpi';
GG{9}=connect(PP{9},Wuf,Wut,Wal,Wtheta,Wkhpi,{ 'wf','wt','uf','ut'},...
{'za1','ztheta','zkhpi','zut','zuf','a1'});
GG{9} = canon(GG{9},'modal');
nz=size(GG{9},1)-1;
[A,B,C,D] = ssdata(GG{9});
[s,e] = size(D);
A=GG{9}.a; B=GG{9}.b; C=GG{9}.c; D=GG{9}.d;
B1=B(:,1:nw); B2=B(:,nw+1:end);
C1=C(1:nz,:); C2=C(nz+1:end,:);
D11=D(1:nz,1:nw); D12=D(1:nz,nw+1:end);
D21=D(nz+1:end,1:nw); D22=D(nz+1:end,nw+1:end);
Dc = zeros(nu,ny);
Cc = F*inv(V);
Bc = inv(U.)*L;
Ac = inv(U.)*(M-X*A*Y-X*B2*F-L*C2*Y)*inv(V);

Acch=Ac-Bc*D22*Cc;
Bcch=Bc-Bc*D22*Dc;
Ccch=(1-Dc*D22)*Cc;
Dcch=Dc;
eig(Acch)
K1=ss(Acch,Bcch,Ccch,Dcch);

```

Cálculo do controlador do modelo de 7 graus de liberdade:

```
function K1=Hinfpolitopico(G,n,ny,nu,nw,nz)

%=====
%Controlador H infinito com incertezas politópicas
%=====

N = length(G);

mi = sdpvar(1,1);
Y = sdpvar(n,n);
X = sdpvar(n,n);
L = sdpvar(n,ny,'full');
F = sdpvar(nu,n,'full');
M = sdpvar(n,n,'full');

LMI = set([Y eye(n);
           eye(n) X] > 0);

for i = 1:N

    [A,B,C,D] = ssdata(G{i});
    [s,e] = size(D);

    A=G{i}.a; B=G{i}.b; C=G{i}.c; D=G{i}.d;
    B1=B(:,1:nw); B2=B(:,nw+1:end);
    C1=C(1:nz,:); C2=C(nz+1:end,:);
    D11=D(1:nz,1:nw); D12=D(1:nz,nw+1:end);
    D21=D(nz+1:end,1:nw); D22=D(nz+1:end,nw+1:end);

    LMI = LMI + set([Y*A'+F'*B2'+A*Y+B2*F A+M' Y*C1'+F'*D12' B1;
                    A'+M A'*X+C2'*L'+X*A+L*C2 C1' X*B1+L*D21;
                    C1*Y+D12*F C1 -eye(nz) zeros(nz,nw);
                    B1' B1'*X+D21'*L' zeros(nw,nz) -mi*eye(nw)]<0);
```

```

end

options = sdpsettings('solver','sedumi','shift',1e-6);
d = solvesdp(LMI,mi,options);

gama = sqrt(double(mi));
X = double(X);
Y = double(Y);
L = double(L);
F = double(F);
M = double(M);

U = eye(n);
V = inv(U.')(eye(n)-X*Y);

%=====
%Teste - matriz a fechar no controlador
%=====
mn=1500; cnf=1000; cnt=1100; c2=0; kn=190000;
% m1=0.85*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=0.85*kn;
m1=0.85*mn;c1f=0.85*cnf;c1t=0.85*cnt;k2=0.85*kn;
[A,B1,B2,C1,D11,D12]=matrizes2gl(m1,k2,c1f,c1t);
PP{1}=ss(A,[B1 B2],[C1],[D11 D12]);
PP{1}.InputName={'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'};
PP{1}.OutputName={'a1','theta','phi','khpi'};
numa1=[1 314.2 987];
dena1=[1 43.98 987];
[Aa1,Ba1,Ca1,Da1]=tf2ss(numa1,dena1);
Wa1=ss(Aa1,Ba1,Ca1,Da1);
numtheta=[1 50.27 25.27];
denttheta=[1 7.037 25.27];
[Atheta,Btheta,Ctheta,Dtheta]=tf2ss(numtheta,denttheta);
Wtheta=ss(Atheta,Btheta,Ctheta,Dtheta);
Wphi=Wtheta;
numkhpi=[1 50];

```

```

denkhpi=[1 1];
[Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi]=tf2ss(numkhpi,denkhpi);
Wkhpi=ss(Akhpi,Bkhpi,Ckhpi,Dkhpi);
Wute=1e-3*ss(1);
Wufe=1e-3*ss(1);
Wufd=1e-3*ss(1);
Wutd=1e-3*ss(1);
Wal.InputName='a1'; Wal.OutputName='za1';
Wtheta.InputName='theta'; Wtheta.OutputName='ztheta';
Wphi.InputName='phi'; Wphi.OutputName='zphi';
Wute.InputName='ute'; Wute.OutputName='zute';
Wufe.InputName='ufe'; Wufe.OutputName='zufe';
Wufd.InputName='ufd'; Wufd.OutputName='zufd';
Wutd.InputName='utd'; Wutd.OutputName='zutd';
Wkhpi.InputName='khpi'; Wkhpi.OutputName='zkhpi';
GG{1}=connect(PP{1},Wufd,Wufe,Wutd,Wute,Wal,Wtheta,Wphi,Wkhpi,...
{'wfd','wfe','wtd','wte','Mc','ufd','ufe','utd','ute'},...
{'za1','ztheta','zphi','zkhpi','zute','zufe','zufd','zutd','a1'});
GG{1} = canon(GG{1},'modal');
n=size(A,1);
nw=size(B1,2); %número de entradas exogenas
nu=size(B2,2); %número de entradas de controle
ny=1; %número de saidas medidas
nz=8;
[A,B,C,D] = ssdata(GG{1});
[s,e] = size(D);
A=GG{1}.a; B=GG{1}.b; C=GG{1}.c; D=GG{1}.d;
B1=B(:,1:nw); B2=B(:,nw+1:end);
C1=C(1:nz,:); C2=C(nz+1:end,:);
D11=D(1:nz,1:nw); D12=D(1:nz,nw+1:end);
D21=D(nz+1:end,1:nw); D22=D(nz+1:end,nw+1:end);
%-----

Dc = zeros(nu,ny);
Cc = F*inv(V);
Bc = inv(U.')*L;

```

```
Ac = inv(U.')*(M-X*A*Y-X*B2*F-L*C2*Y)*inv(V);
```

```
Acch=Ac-Bc*D22*Cc;
```

```
Bcch=Bc-Bc*D22*Dc;
```

```
Ccch=(1-Dc*D22)*Cc;
```

```
Dcch=Dc;
```

```
eig(Acch)
```

```
K1=ss(Acch,Bcch,Ccch,Dcch);
```